G Model
RIMNI-172; No. of Pages 8

ARTICLE IN PRESS

Rev. int. métodos numér. cálc. diseño ing. 2015;**xxx(xx)**:xxx–xxx

ELSEVIER

Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería

www.elsevier.es/rimni

Determinación del orden fraccional en el modelo Zener para caracterizar los efectos biomecánicos ocasionados por el flujo sanguíneo

J.E. Palomares [a,*], M. Rodriguez [b,**] y J.G. Castro [a,**]

[a] *Instituto Tecnológico Superior de Cajeme, Carretera Int. A Nogales Km. 2, Cd. Obregón, Sonora, México*
[b] *Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría, Calle 114, No. 11901, entre Ciclovía y 129. Cujae, Marianao, Ciudad de La Habana, Cuba*

INFORMACIÓN DEL ARTÍCULO

Historia del artículo:
Recibido el 5 de marzo de 2015
Aceptado el 30 de septiembre de 2015
On-line el xxx

Palabras clave:
Biomecánica
Cálculo fraccional
Viscoelasticidad
Arteria
Tejidos blandos

R E S U M E N

El propósito principal de la presente publicación consiste en la determinación adecuada del orden fraccional en el modelo viscoelástico de Zener y el análisis de las implicaciones que se derivan de la precisión en la obtención del mismo. Esto se realiza empleando el método numérico de Levenberg-Marquardt a partir de valores reportados en la literatura. Los parámetros utilizados son obtenidos para un segmento de arteria empleando un experimento de relajación a los esfuerzos. Una vez determinado el orden fraccional se procede a determinar la solución del modelo empleando la función de dos parámetros de Mittag-Leffler y la operación de convolución, con la finalidad de comparar el comportamiento del modelo de orden fraccional con el de orden entero e identificar sus principales diferencias. Se obtienen además las deformaciones que experimenta la arteria bajo el estímulo de un pulso sanguíneo normal y otros disímiles, simulando el efecto provocado en el flujo sanguíneo por una arritmia y el ocasionado por el proceso de ventilación mecánica. Por último se analiza la respuesta dinámica del material bajo una serie de pulsos, utilizando la operación de convolución y el método numérico de Gauss-Kronrod, identificando la precisión en la reproducción de los mismos en el modelo de orden fraccional comparado con el de orden entero.

Zener fractional order determination and biomechanical blood flow characterization

Keywords:
Biomechanics
Fractional calculus
Viscoelasticity
Artery
Soft tissues

A B S T R A C T

The main purpose of this publication is the proper determination of the fractional order at the Zener viscoelastic model's and the analysis of the implications derived from the accuracy in obtaining this. The procedure is performed using the numerical method of Levenberg-Marquardt from values reported in the literature. The parameters used are obtained from an artery segment using a stress relaxation test. After determining the fractional order is proceeded to find the model solution using, the function of Mittag-Leffler with two parameters and the convolution operation in order to compare the behavior of the fractional model vs the integer order and identify their key differences. The displacements present on the artery are obtained, under the stimulus of a normal blood pulse and two dissimilar, simulating the effect in blood flow caused by an arrhythmia and by mechanical ventilation process. Finally the dynamic response from the pulses is analyzed using the convolution operation and Gauss Kronrod numeric method, where the solution's accuracy obtained by the fractional model is observed, an compared with the integer order model.

* Autor para correspondencia principal.
** Autor para correspondencia.
Correos electrónicos: jepalomares@itesca.edu.mx (J.E. Palomares), melchor@mecanica.cujae.edu.cu (M. Rodriguez), jcastro@itesca.edu.mx (J.G. Castro).

http://dx.doi.org/10.1016/j.rimni.2015.09.006

Cómo citar este artículo: J.E. Palomares, et al. Determinación del orden fraccional en el modelo Zener para caracterizar los efectos biomecánicos ocasionados por el flujo sanguíneo, Rev. int. métodos numér. cálc. diseño ing. 2015. http://dx.doi.org/10.1016/j.rimni.2015.09.006

1. Introducción

Determinar los fenómenos mecánicos que ocurren en las arterias resulta de suma importancia debido a su influencia en la fisiología arterial y en el tratamiento-seguimiento de los principales padecimientos arteriales ocasionados por los efectos del flujo sanguíneo [1]. Estos padecimientos se deben generalmente a: la calcificación de las paredes arteriales, los aneurismas [2], la obstrucción de las arterias por acumulación de placas de colesterol, padecimiento comúnmente conocido como aterosclerosis, [3] y por los efectos perjudiciales de la hipertensión [4], por citar algunos de los principales.

Los materiales que forman el cuerpo humano se dividen principalmente en dos grandes ramas, los tejidos blandos y los mineralizados. En la primera rama se encuentran las arterias, venas, músculos, piel, tendones, entre otros. La segunda se compone principalmente de los huesos y los dientes. Aunque en algunos casos suelen presentarse, tejidos blandos con formaciones calcificadas, estos no son habituales.

Las arterias a su vez se componen principalmente de redes de colágeno y elastina, además de tejido muscular liso lo que les proporciona un tipo de comportamiento material sumamente complejo.

Generalmente en la mayoría de los estudios biomecánicos de los tejidos blandos, estos han sido caracterizados bajo los modelos de comportamiento material viscoelástico [5]. Debido a que poseen características propias de los materiales elásticos, generalmente sólidos, y a su vez también se comportan como un fluido viscoso.

Una de las principales características de los materiales elásticos consiste en su capacidad de almacenar energía cuando son deformados bajo cargas, y en devolver toda esta energía cuando la carga se deja de aplicar. De forma contraria en el fluido viscoso la energía mecánica es continuamente disipada en forma de calor. Sin embargo existen materiales, como el caso de este estudio, que simultáneamente almacenan y disipan energía mecánica cuando se sujetan a un proceso de cargas, este tipo de materiales se conocen como viscoelásticos. Por lo que en estos no solamente se relaciona la tensión mecánica con la deformación, sino que además involucra su razón de cambio con respecto al tiempo.

Los materiales viscoelásticos suelen ser modelados a través de arreglos consistentes de resortes y amortiguadores, como lo son los modelos reológicos de Maxwell y de Kelvin-Voigt. Los modelos mencionados anteriormente son propuestos inicialmente por Fung [6] para su aplicación en la modelación de tejidos blandos. Sin embargo sólo se consideraban como aproximaciones teóricas, ya que estos modelos tradicionales presentan únicamente una caracterización parcial o descriptiva del fenómeno. Los mismos han sido modificados usualmente a partir de los modelos clásicos agregando más elementos en serie o paralelo al original, logrando una mejor caracterización del comportamiento mecánico.

El problema derivado de realizar esta adición de elementos es que se aumenta considerablemente la complejidad del modelo haciendo poco conveniente su uso.

Sin embargo en los últimos años un antiguo concepto con novedosas aplicaciones, el cálculo fraccional, ha sido utilizado en la modelación y caracterización de materiales viscoelásticos, principalmente los polímeros.

Al parecer la viscoelasticidad es el campo de mayor aplicación de los operadores diferenciales e integrales fraccionales... se demuestra que el uso de derivadas fraccionales para el modelado matemático de materiales viscoelásticos resulta natural... Podlubny [7]

También existen una serie de investigaciones orientadas a la caracterización de los efectos mecánicos en los tejidos biológicos blandos empleando modelos fraccionales viscoelásticos como lo son: el utilizado en tejido extraído del hígado [8], la determinación del comportamiento mecánico del tejido graso empleando núcleos derivativos [9] o el del tejido cerebral [10] a partir de los modelos clásicos agregando un nuevo elemento fraccional conocido como *spring-pot*, cuya derivada es de orden no entero y se encuentra para dichos modelos entre cero y uno [11].

A su vez los modelos viscoelásticos de orden fraccional son empleados en la obtención de los cambios de las propiedades mecánicas de tejidos blandos para la detección temprana de diversas situaciones patológicas, principalmente el cáncer de próstata [12], donde el papel de la determinación del orden fraccional en el modelo juega un rol sumamente importante debido a que la exactitud del mismo está directamente asociado con la certeza del procedimiento. Por lo que en diversas investigaciones se desarrollan metodologías en función de su adecuada obtención [13,14].

2. Cálculo fraccional

El origen del cálculo fraccional data desde el mismo fundamento del cálculo diferencial [7] cuando en una carta enviada a Leibniz el 30 de Septiembre de 1695 en la que L'Höpital le cuestiona el significado que tendría su notación desarrollada para la n-ésima derivada $\frac{d^n y}{dx^n}$, el qué sucedería en el caso $n = \frac{1}{2}$, a lo que Leibniz le responde:

"Usted puede ver por eso señor que uno puede expresar por una serie infinita una cantidad como $\frac{d^{1/2}y}{dx^{1/2}}$. Aunque las series infinitas y geométricas son relaciones distantes, las series infinitas admiten sólo el uso de exponentes que son enteros, no hace todavía el uso de exponentes fraccionarios... esto conduciría a una paradoja, de la que algún día se extraerán consecuencias útiles"

2.1. La derivada fraccional definida en $\mathbb{R}^+$

El operador diferencial local de la derivada de orden n para una variable independiente t, $D_t^n = \frac{d^n}{dt^n}$ es solamente el operador inverso por la izquierda del operador integral no local del n-campo integral ${}_aI_t^n$ teniendo como punto de inicio cualquier valor $a < t$. De hecho, para cualquier función continua con derivada continua, es decir, $f(t) \in \mathcal{C}^2$ se reconoce:

$$D_t^n \circ {}_aI_t^n\ f(t) = f(t), \quad t > a, \tag{1}$$

y

$${}_aI_t^n \circ D_t^n\ f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(a^+)\frac{(t-a)^k}{k!}, \quad t > a. \tag{2}$$

donde $f^{(k)}(a^+)$ es la k-ésima derivada de la función f evaluada en a por la derecha. Como consecuencia de esto, tomando $a = 0$ se requiere que ${}_0D_t^\alpha$ sea definida como *inversa por la izquierda* de ${}_0I_t^\alpha$. Para dicho propósito primero se introduce el número entero:

$$m \in \mathbb{N} \quad \text{tal que} \quad m-1 < \alpha < m$$

y entonces se define *la derivada fraccional de Riemann-Liouville* de orden $\alpha > 0$:

$${}_0D_t^\alpha f(t) = D_t^m \circ {}_0I_t^{m-\alpha}\ f(t), \quad \text{con,} \quad m-1 < \alpha < m, \tag{3}$$

como:

$${}_0D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\frac{d^m}{dt^m}\int_0^t \frac{f(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha+1-m}}, \tag{4}$$

$$\text{si} \quad m-1 < \alpha < m \quad \text{y} \quad \frac{d^m}{dt^m}f(t), \quad \text{si} \quad \alpha = m$$

para complementar la definición de la derivada se tiene que ${}_0D_t^0 = I$. Donde $\Gamma(x)$ es la función Gamma la cual se emplea como una

Cómo citar este artículo: J.E. Palomares, et al. Determinación del orden fraccional en el modelo Zener para caracterizar los efectos biomecánicos ocasionados por el flujo sanguíneo, Rev. int. métodos numér. cálc. diseño ing. 2015. http://dx.doi.org/10.1016/j.rimni.2015.09.006