C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 356 (2018) 433–438

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Probability theory/Calculus of variations

Expected Shortfall and optimal hedging payoff

Expected Shortfall *et* payoff *optimal de couverture*

Olivier Guéant

CES – Université Paris-1, Panthéon-Sorbonne, 106, boulevard de l'Hôpital, 75013 Paris, France

ARTICLE INFO

Article history:
Received 9 January 2018
Accepted after revision 19 March 2018
Available online 23 March 2018

Presented by Olivier Pironneau

ABSTRACT

By using variational techniques, we provide an optimal payoff written on a given random variable for hedging – in the sense of minimizing the Expected Shortfall at a given threshold – a payoff written on another random variable. In numerous financially relevant examples, our result leads to optimal payoffs in closed form. From a theoretical viewpoint, our result is also useful for providing bounds to the classical Expected Shortfall minimization problem with given financial instruments.

RÉSUMÉ

En utilisant des techniques de calcul variationnel, nous obtenons un *payoff*, fonction d'une variable aléatoire fixée, permettant de couvrir optimalement – au sens de la minimisation de l'*Expected Shortfall* à un seuil donné – un *payoff* fonction d'une autre variable aléatoire. Dans de nombreux cas pertinents en finance, le résultat obtenu aboutit à des *payoffs* optimaux en formule fermée. Du point de vue théorique, le résultat obtenu fournit aussi des bornes pour le problème classique de la minimisation de l'*Expected Shortfall* avec des instruments financiers donnés.

Version française abrégée

Considérons un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{F})$ muni d'une mesure de probabilité $\mathbb{P}$. Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur Ω et à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{R}^k$ respectivement. On suppose que X a une densité p_X sous $\mathbb{P}$ et l'on note $\mathcal{S}_X$ son support. On introduit une mesure de probabilités $\mathbb{Q}$ absolument continue par rapport à $\mathbb{P}$ et l'on note q_X la densité de X par rapport à $\mathbb{Q}$.

E-mail address: olivier.gueant@univ-paris1.fr.

https://doi.org/10.1016/j.crma.2018.03.010

Pour une fonction borélienne $h : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ telle que $h(Y) \in L^1(\Omega, \mathbb{P})$ et un seuil d'*Expected Shortfall* $\alpha \in (0,1)$ (voir Eq. (4) pour la définition de l'*Expected Shortfall*), le problème traité dans cet article est celui de la minimisation – en réalité trouver un minimiseur – de

$$g \in \mathfrak{P} \mapsto \mathrm{ES}_\alpha^{\mathbb{P}}(h(Y) - g(X)), \tag{1}$$

où

$$\mathfrak{P} = \{g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \text{ fonction borélienne} | g(X) \in L^1(\Omega, \mathbb{P}) \cap L^1(\Omega, \mathbb{Q}), \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[g(X)] = 0\}.$$

Ce problème est, en mathématiques financières, un problème de design optimal de *payoff* écrit sur X pour couvrir, au sens de la minimisation de l'*Expected Shortfall*, un *payoff* écrit sur Y. Il est intimement lié au problème plus classique de la couverture en *Expected Shortfall* (connu sous le nom de ES/CVaR-hedging), dans lequel les instruments de couverture sont, en revanche, fixés (voir [1] et [2] pour un résultat général d'existence et des méthodes numériques).

Le résultat général que nous obtenons stipule que le *payoff* optimal est relié à la *Value at Risk* sous la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(\cdot|X)$. Il est donné par le théorème suivant.

Théorème 0.1. *Supposons que*

- *$h(Y)$ n'a pas d'atome sous $\mathbb{P}(\cdot|X = x)$ pour tout $x \in \mathcal{S}_X$,*
- *$\forall x \in \mathcal{S}_X, \alpha(x) := 1 - (1-\alpha)\frac{q_X(x)}{p_X(x)} > 0$, i.e. $\frac{q_X(x)}{p_X(x)} < \frac{1}{1-\alpha}$,*
- *$VaR_{\alpha(X)}^{\mathbb{P}(\cdot|X)}(h(Y)) \in L^1(\Omega, \mathbb{P})$.*

Soit $g \in \mathfrak{P}$ définie par

$$g(x) = \begin{cases} VaR_{\alpha(x)}^{\mathbb{P}(\cdot|X=x)}(h(Y)) - t^*, & si\ x \in \mathcal{S}_X \\ 0, & si\ x \notin \mathcal{S}_X, \end{cases}$$

où

$$t^* = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[VaR_{\alpha(X)}^{\mathbb{P}(\cdot|X)}(h(Y))\right]. \tag{2}$$

On a $\forall \tilde{g} \in \mathfrak{P}$,

$$ES_\alpha^{\mathbb{P}}(h(Y) - g(X)) \le ES_\alpha^{\mathbb{P}}(h(Y) - \tilde{g}(X)).$$

Dans le cas particulier où Y est à valeurs réelles et h croissant (le cas décroissant se traite aussi aisément), on a un résultat particulier donné par le corollaire suivant.

Corollaire 0.2. *Supposons que*

- *Y est à valeurs réelles (i.e. $k = 1$) et n'a pas d'atome sous $\mathbb{P}(\cdot|X = x)$ pour tout $x \in \mathcal{S}_X$,*
- *$\forall x \in \mathcal{S}_X, \alpha(x) := 1 - (1-\alpha)\frac{q_X(x)}{p_X(x)} > 0$, i.e. $\frac{q_X(x)}{p_X(x)} < \frac{1}{1-\alpha}$,*
- *h est croissant (pas nécessairement strictement) et $h\left(VaR_{\alpha(X)}^{\mathbb{P}(\cdot|X)}(Y)\right) \in L^1(\Omega, \mathbb{P})$.*

Soit $g \in \mathfrak{P}$ définie par

$$g(x) = \begin{cases} h\left(VaR_{\alpha(x)}^{\mathbb{P}(\cdot|X=x)}(Y)\right) - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[h\left(VaR_{\alpha(X)}^{\mathbb{P}(\cdot|X)}(Y)\right)\right], & si\ x \in \mathcal{S}_X \\ 0, & si\ x \notin \mathcal{S}_X. \end{cases}$$

On a $\forall \tilde{g} \in \mathfrak{P}$,

$$ES_\alpha^{\mathbb{P}}(h(Y) - g(X)) \le ES_\alpha^{\mathbb{P}}(h(Y) - \tilde{g}(X)).$$

Ce résultat permet d'obtenir des formules explicites pour le *payoff* optimal de couverture dans des cas très généraux, par exemple des distributions marginales presque quelconques pour X et Y et une structure de dépendance de type copule Student (voir Eq. (9)) – ce cas contient en particulier le cas des vecteurs Student (voir Eq. (10)) et des vecteurs gaussiens (voir Eq. (11)).