C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 356 (2018) 141–145

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Group theory/Differential geometry

On the difficulty of finding spines

De la difficulté à trouver des épines

Cyril Lacoste

IRMAR, Université de Rennes-1, 35000 Rennes, France

ARTICLE INFO

Article history:
Received 18 September 2017
Accepted after revision 16 January 2018

Presented by the Editorial Board

ABSTRACT

We prove that the set of symplectic lattices in the Siegel space $\mathfrak{h}_g$ whose systoles generate a subspace of dimension at least 3 in $\mathbb{R}^{2g}$ does not contain any $\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z})$-equivariant deformation retract of $\mathfrak{h}_g$.

RÉSUMÉ

Nous montrons que l'ensemble des réseaux symplectiques dans l'espace de Siegel $\mathfrak{h}_g$ dont les systoles engendrent un sous-espace de dimension au moins 3 dans $\mathbb{R}^{2g}$ ne contient aucun rétract par déformation $\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z})$-équivariant de $\mathfrak{h}_g$.

Version française abrégée

Soit Γ un groupe discret infini. On dit qu'un Γ-complexe cellulaire W est un modèle de type $\underline{E}\Gamma$ si, pour tout sous-groupe $H \subset \Gamma$, l'ensemble de points fixes W^H est contractile si H est fini et vide sinon. La plus petite dimension possible d'un tel espace est la dimension géométrique propre de Γ, notée $\underline{\mathrm{gd}}(\Gamma)$. Nous avons montré dans [11], en nous basant sur les résultats de [1], que si G est un groupe de Lie linéaire semisimple et $\Gamma \subset G$ un réseau, alors $\underline{\mathrm{gd}}(\Gamma)$ est égale à la dimension cohomologique virtuelle $\mathrm{vcd}(\Gamma)$ de Γ, c'est-à-dire à la dimension cohomologique de n'importe quel sous-groupe d'indice fini sans torsion. Si $K \subset G$ est un sous-groupe compact maximal, l'espace symétrique $X = G/K$ est un modèle de type $\underline{E}\Gamma$, mais pas de dimension minimale, sauf si Γ est cocompact. Nous souhaitons ainsi trouver concrètement un modèle de type $\underline{E}\Gamma$ de dimension $\mathrm{vcd}(\Gamma)$. Un tel espace peut, par exemple, servir à calculer la cohomologie de Γ.

Il est naturel d'essayer de construire ce modèle en tant que sous-ensemble de l'espace symétrique X ; dans ce cas nous l'appelons une épine. Plus précisément, une épine pour Γ est un rétract par déformation Γ-équivariant de l'espace symétrique $X = G/K$, de dimension $\mathrm{vcd}(\Gamma)$, sur lequel Γ agit de manière cocompacte.

Il peut paraître surprenant que de tels espaces ne sont connus que dans très peu de cas (groupes de $\mathbb{Q}$-rang 1, $\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$). Le but de cet article est d'expliquer pourquoi il peut être difficile de trouver des épines.

E-mail address: cyril.lacoste@univ-rennes1.fr.

https://doi.org/10.1016/j.crma.2018.01.007

Rappelons brièvement la construction de l'épine du groupe $\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$. On identifie l'espace symétrique $S_n = \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})/\mathrm{SO}(n)$ à l'ensemble des réseaux de $\mathbb{R}^n$ de covolume 1 modulo isométries munis d'une $\mathbb{Z}$-base. Généralisant un résultat de Soulé (voir [17]), Ash a prouvé dans [2] que l'ensemble des réseaux dont les systoles (ou vecteurs minimaux) engendrent $\mathbb{R}^n$ est une épine pour $\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$ (voir [2]). Plus précisément, si $\mathcal{X}_i$ est l'ensemble des réseaux dont les vecteurs minimaux engendrent un sous-espace de dimension au moins i (pour $i = 1,\ldots,n$), on peut montrer que $\mathcal{X}_{i+1}$ est un rétract par déformation $\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$-équivariant de $\mathcal{X}_i$ pour tout $i = 1,\ldots,n-1$.

Il y a eu par la suite des tentatives de constructions similaires pour d'autres groupes arithmétiques tels que le groupe symplectique $\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z})$. Par exemple, Bavard a montré dans [4] que l'ensemble des réseaux symplectiques dont les systoles engendrent un sous-espace non isotrope pour la forme symplectique est un rétract $\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z})$-équivariant de l'espace de Siegel $\mathfrak{h}_g = \mathrm{Sp}(2g,\mathbb{R})/\mathrm{U}(g)$. Malheureusement, ce rétract est de codimension 1, car il existe des réseaux symplectiques avec seulement deux systoles non isotropes. On pourrait alors essayer de rétracter sur l'ensemble des réseaux symplectiques avec au moins trois systoles linéairement indépendantes. Nous montrons dans cet article que l'on ne peut pas faire cela.

Théorème 1.1. L'ensemble $(\mathcal{X}_3 \cap \mathfrak{h}_g)$ des réseaux symplectiques dans $\mathfrak{h}_g$ dont les systoles engendrent un sous-espace de dimension au moins 3 dans $\mathbb{R}^{2g}$ ne contient aucun modèle de type $\underline{E}\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z})$. En particulier, il ne contient aucun rétract par déformation $\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z})$-équivariant de $\mathfrak{h}_g$.

Nous obtenons par la suite le même résultat en remplaçant $\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z})$ par $\mathrm{Aut}(\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z}))$:

Théorème 1.2. L'ensemble $\mathcal{X}_3 \subset S_n = \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})/\mathrm{SO}(n)$ $(n \geqslant 3)$ des réseaux de $\mathbb{R}^n$ dont les systoles engendrent un sous-espace de dimension au moins 3 ne contient aucun modèle de type $\underline{E}\mathrm{Aut}(\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z}))$.

Ce corollaire est remarquable, car $\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$ et $\mathrm{Aut}(\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z}))$ ne diffèrent que d'un groupe fini et agissent tous les deux par isométries sur S_n.

1. Introduction

Let Γ be an infinite discrete group. A *model for* $\underline{E}\Gamma$, or a classifying space for proper actions, is a Γ-CW-complex W such that, for every subgroup $H \subset \Gamma$, the fixed-point set W^H is contractible if H is finite and empty otherwise. Models for $\underline{E}\Gamma$ always exist, and the minimal possible dimension of such a model is the *proper geometric dimension* of Γ, denoted $\underline{\mathrm{gd}}(\Gamma)$. Completing earlier work in [1], we proved in [11] that if G is a semisimple linear Lie group and $\Gamma \subset G$ is a lattice, then $\underline{\mathrm{gd}}(\Gamma)$ equals the *virtual cohomological dimension* $\mathrm{vcd}(\Gamma)$ of Γ, that is, the cohomological dimension of any torsionfree finite-index subgroup of Γ. If Γ is arithmetic and $K \subset G$ is a maximal compact subgroup, then $\mathrm{vcd}(\Gamma)$ equals the dimension of G/K minus the rational rank of Γ (see [6]).

With the same notations, note that the symmetric space $X = G/K$ is itself a model for $\underline{E}\Gamma$, but not of minimal dimension unless Γ is cocompact. It is then a question to find concretely a cocompact model W for $\underline{E}\Gamma$ of dimension $\mathrm{vcd}(\Gamma)$. Besides the intrinsic interest of the problem, one can use such a model to compute the cohomology of Γ (see examples in [16], [3], [8], [7]).

Because of the lack of another starting point, it is natural to try to construct W as a subspace of the symmetric space X. In this case, we call it a *spine*. More precisely a spine for Γ is a Γ-equivariant deformation retract of the symmetric space $X = G/K$, of dimension $\mathrm{vcd}(\Gamma)$ and on which Γ acts cocompactly.

It might be surprising to the reader that such spines are known only in very few cases: basically only for $\mathbb{Q}$-rank 1 groups (see [18]) and for $\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$ (and somewhat more generally for linear symmetric spaces, see [17], [2], [15] and [14]). The aim of this note is to explain why it might not be easy to find spines.

First recall the construction of $\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$'s spine. Identify the symmetric space $S_n = \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})/\mathrm{SO}(n)$ with the space of lattices in $\mathbb{R}^n$ of covolume 1 modulo isometries with a $\mathbb{Z}$-basis. The *systole* of a lattice $\Lambda = A\mathbb{Z}^n$, with $A \in \mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$, is defined as

$$\mathrm{syst}(\Lambda) = \min_{v \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} |Av|.$$

We will also call systoles (or minimal vectors) the vectors v that realize the minimum. A lattice is *well-rounded* if its minimal vectors span $\mathbb{R}^n$. Generalizing a result of Soulé in [17], Ash proved in [2] that the well-rounded retract, that is the set of all well-rounded lattices, is a spine for $\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$. The idea to realize the retraction is as follows: given a non-well-rounded lattice in $\mathbb{R}^n$, expand the space spanned by the shortest vectors and contract its orthogonal complement until we find an additional systole. In this way, one can prove that if $\mathcal{X}_i$ is the set of lattices whose systoles span a subspace of dimension at least i (for $i = 1,\ldots,n$), then $\mathcal{X}_{i+1}$ is a $\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$-equivariant deformation retract of $\mathcal{X}_i$ for every $i = 1,\ldots,n-1$. Remark that $\mathcal{X}_1 = S_n$ and $\mathcal{X}_n$ is the set of well-rounded lattices, that is, our well-rounded retract.

Some effort has been devoted to mimic the construction of the well-rounded retract in other situations. For instance, in [10], Ji constructed well-rounded retracts for mapping class groups acting on Teichmüller spaces, and Bavard proved in [4] that the symmetric space $\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{R})/\mathrm{U}(g)$ (also known as the Siegel space $\mathfrak{h}_g$), identified with the set of symplectic lattices in $\mathbb{R}^{2g}$ endowed with a symplectic basis, admits a $\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z})$-equivariant deformation retract, consisting of the set of