C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 354 (2016) 788–793

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Partial differential equations

Identifiability for a severely ill-posed oxygen balance model

Identifiabilité pour un système de désoxygénation–réoxygénation sévèrement mal posé

Naïma Débit [a], Souad Khiari [b,c]

[a] *Université Claude-Bernard, Lyon-1, UMR CNRS 5208, ICJ, 69100 Villeurbanne, France*
[b] *Sorbonne Universités, UTC, EA 2222, LMAC, 60205 Compiègne, France*
[c] *Université de Tunis El Manar, École nationale d'ingénieurs de Tunis, LAMSIN, 1002, Tunis, Tunisie*

ARTICLE INFO

Article history:
Received 27 May 2015
Accepted 23 May 2016
Available online 1 June 2016

Presented by Gilles Lebeau

ABSTRACT

We are interested in recovering boundary data in a dispersive oxygen-balance model. The missing boundary condition is the flux of the biochemical oxygen demand (the amount of oxygen necessary for the oxidation of organic matter) at one extreme point. The observations are collected on the dissolved oxygen at the other extremity. This problem turns out to be severely ill-posed. We perform the mathematical analysis of it. We prove a uniqueness result owing to Pazy's theorem for parabolic boundary value problems and we prove that the compatible data set is dense.

RÉSUMÉ

Nous nous intéressons au problème inverse de complétion de données pour un modèle parabolique de biodégradation, basé sur deux traceurs : la demande biochimique en oxygène (DBO) et l'oxygène dissous (OD). La donnée manquante est le flux de la DBO à l'extrémité amont du cours d'eau. La contrepartie est que l'on dispose de deux conditions à l'extrémité aval sur l'OD. Le problème résultant est mal posé. Nous vérifions qu'il souffre d'une forte instabilité ; il est donc sévèrement mal posé. Ensuite, nous réalisons l'analyse mathématique du problème pour prouver un résultat d'unicité de la solution, et nous montrons que l'ensemble des données compatibles est dense.

Version française abrégée

La modélisation de la pollution organique des eaux s'appuie essentiellement sur deux traceurs (cf. [10]). L'un est l'oxygène dissous, et l'autre est la demande biochimique en oxygène, c'est-à-dire la quantité d'oxygène nécessaire à la

E-mail addresses: naima.debit@univ-lyon1.fr (N. Débit), souad.khiari@utc.fr (S. Khiari).

http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2016.05.012

biodégradation de la matière organique. Dans les procédés d'autoépuration, certaines bactéries aérobies jouent un rôle principal ; elles décomposent la matière organique polluante en absorbant une fraction de l'oxygène dissous dans le milieu. La DBO est donc un indicateur pertinent de la présence de matières organiques biodégradables dans les cours d'eau. Cela permet aussi d'évaluer les qualités organoleptiques de l'eau.

L'objectif de cette note est l'analyse de la reconstitution du flux de pollution (de DBO) à partir d'une observation sur l'oxygène dissous (OD). La particularité de ce problème réside dans le fait que la station d'observation est loin de l'endroit où l'on souhaite retrouver la donnée manquante. Ce problème est gouverné mathématiquement par un modèle de complétion de données au bord pour un système de deux équations paraboliques où seuls les phénomènes de réaction et de dispersion sont pris en compte. Nonobstant son importance physique, l'advection est mise de côté, car elle ne cause pas de difficultés mathématiques majeures. Tout ce qui sera démontré ici peut être étendu au système de transport complet. Le problème inverse qui nous préoccupe est donné par les équations (1)–(5). Les conditions aux limites sont abondantes sur la concentration d'OD (c), alors que certaines données sont manquantes sur la densité de DBO (b). Nous débutons par l'étude du caractère mal posé de ce problème de complétion de données, après l'avoir exprimé sous sa forme réduite. Dans le problème réduit, le flux de pollution est l'inconnue principale, ce qui nous amène à mettre en évidence un opérateur sur l'ensemble des flux admissibles. La difficulté d'analyser, et éventuellement de résoudre le problème, est intrinsèquement liée aux propriétés de cet opérateur. Nous établissons, dans un cas particulier, que cet opérateur est finalement un opérateur de convolution de noyau régulier et très plat à l'origine. Nous examinons par la suite l'identifiabilité. Un résultat d'unicité est démontré grâce à la théorie de point-selle développée dans [4,3] et à un résultat d'unicité dû à A. Pazy [9].

1. Introduction and setting of the problem

The model we deal with is centered on the indicator b, for the Biochemical Oxygen Demand and the Dissolved Oxygen concentration c; their respective acronyms are BOD and DO. The BOD is the amount of oxygen necessary for the biodegradation of the organic matter, while the DO is the oxygen housed in the water. In the sequel, the symbol x is used for the curvilinear abscissa, while t stands for the time variable. The stream water is thus represented by $I = (0, L)$, while $T > 0$ is the final instant. The couple of concentrations (b, c) is the solution to the following boundary value system:

$$\partial_t b - (db')' + rb = f \quad \text{in } I \times (0, T), \tag{1}$$

$$\partial_t c - (dc')' + r_* c + rb = g \quad \text{in } I \times (0, T), \tag{2}$$

$$db'(L, t) = dc'(L, t) = 0 \quad \text{in } (0, T), \tag{3}$$

$$db'(0, t) = \gamma(t), \quad dc'(0, t) = 0 \quad \text{in } (0, T), \tag{4}$$

$$b(x, 0) = 0, \quad c(x, 0) = c_S \quad \text{in } I. \tag{5}$$

The longitudinal dispersion coefficient d and the parameters of reaction rates (r, r_*) lie in $L^\infty(I)$ and are positive. The dispersion and reaction parameters d and r are bounded away from zero. The term rb appearing in the transport equation on c is the depletion of oxygen. It is of course possible to add advection to the transport equations. In spite of its important physical role, we choose not to do so for simplicity and because they have no real influence on the mathematics we expose here. Hence, the results we provide are still valid for the advective system. Neumann conditions (4) tell that no oxygen supply (on c) occurs at point $x = 0$ and says also that a polluting flux (on b) is taking place.

The direct system (1)–(5) is triangular and can be studied using well-known tools from the theory of parabolic differential equations (see [9,8]). The specific fact here is that, in real-life situations, measurements on the polluting flux $\gamma(\cdot)$ are too hard to obtain. On the contrary, recording the values of c at the border is easy and may be realized instantaneously. Condition (4) on b at $x = 0$ is therefore replaced by a Dirichlet condition on c at $x = L$, so that

$$c(L, t) = \alpha(t). \tag{6}$$

The effect of the double boundary conditions on c at $x = L$ is dramatic. The nature of the problem is entirely altered. With (4), it was well posed, with (6) it becomes ill posed. It was a direct problem, it becomes an inverse problem. A diagram for the boundary conditions to deal with is provided in Fig. 1.

Ill-posedness degree—To briefly address this important issue, we consider the flux $\gamma(\cdot)$ as a full unknown. Let then $\gamma \in L^2(0, T)$ be given and denote by b_γ the unique solution to the direct problem obtained by assembling equation (1), (the first) boundary condition (3), (the first) condition (4) and (the first) initial condition (5). We turn afterward to c_γ that we construct as the solution to the parabolic problem formed by equation (2) (with $-rb_\gamma$ as a source term), (the second) boundary condition (3), (the second) condition (4) and (the second) initial condition (5). The polluting flux γ to look for is then the one that satisfies the following observation:

$$S\gamma(t) = c_\gamma(L, t) = \alpha(t), \qquad \text{in } (0, T). \tag{7}$$

With this formulation, one may carry out Fourier computations to derive an explicit expression of S, in the case of constant parameters. If $d = 1$ and $r = r_* = 1$ then Fourier computations can be conducted and we obtain: