C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 354 (2016) 271–276

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Partial differential equations/Numerical analysis

Asymptotic Preserving numerical schemes for multiscale parabolic problems

Schémas numériques Asymptotic Preserving *pour les problèmes paraboliques multi-échelles*

Nicolas Crouseilles [a,c], Mohammed Lemou [b,c], Gilles Vilmart [d]

[a] *INRIA, France*
[b] *CNRS, France*
[c] *IRMAR, Université de Rennes-1, campus de Beaulieu, F-35042 Rennes Cedex, France*
[d] *Université de Genève, Section de mathématiques, 2–4, rue du Lièvre, CP 64, CH-1211 Genève 4, Switzerland*

ARTICLE INFO

Article history:
Received 27 July 2015
Accepted after revision 19 November 2015
Available online 4 February 2016

Presented by Olivier Pironneau

ABSTRACT

We consider a class of multiscale parabolic problems with diffusion coefficients oscillating in space at a possibly small scale ε. Numerical homogenization methods are popular for such problems, because they capture efficiently the asymptotic behavior as $\varepsilon \to 0$, without using a dramatically fine spatial discretization at the scale of the fast oscillations. However, it is known that such homogenization schemes are in general not accurate for both the highly oscillatory regime $\varepsilon \to 0$ and the non-oscillatory regime $\varepsilon \sim 1$. In this paper, we introduce an Asymptotic Preserving method based on an exact micro–macro decomposition of the solution, which remains consistent for both regimes.

© 2015 Académie des sciences. Published by Elsevier Masson SAS. All rights reserved.

RÉSUMÉ

On considère une classe de problèmes paraboliques multi-échelles dont les coefficients de diffusion oscillent rapidement en espace à une échelle ε possiblement petite. Les méthodes numériques d'homogénéisation sont populaires pour ces problèmes, car elles capturent efficacement le comportement asymptotique lorsque $\varepsilon \to 0$, sans utiliser une discrétisation spatiale aussi fine que l'échelle des oscillations rapides, comme le nécessiteraient les méthodes non raides standard. Cependant, les schémas d'homogénéisation existants ne sont en général pas précis dans les deux régimes oscillant $\varepsilon \to 0$ et non oscillant $\varepsilon \sim 1$. Dans ce travail, nous introduisons une méthode *Asymptotic Preserving* basée sur une décomposition micro–macro exacte, qui reste consistante pour les deux régimes.

© 2015 Académie des sciences. Published by Elsevier Masson SAS. All rights reserved.

E-mail addresses: nicolas.crouseilles@inria.fr (N. Crouseilles), mohammed.lemou@univ-rennes1.fr (M. Lemou), Gilles.Vilmart@unige.ch (G. Vilmart).

http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2015.11.010
1631-073X/© 2015 Académie des sciences. Published by Elsevier Masson SAS. All rights reserved.

Version française abrégée

L'objectif est de construire des schémas numériques pour des problèmes paraboliques (1) où les coefficients de diffusion sont hautement oscillants en espace. Ce type de modèle intervient dans des problèmes de propagation en milieux exhibants une structure périodique. Dans de nombreux cas, la taille de la période est petite par rapport à la taille caractéristique du milieu, et en désignant par ε leur rapport, une analyse asymptotique est nécessaire pour étudier le comportement de la solution quand $\varepsilon \to 0$. Cette analyse a été conduite dans [4,5,3,10] à l'aide de la convergence double échelle.

D'un point de vue numérique, une approche directe s'avère très coûteuse, puisque les paramètres numériques des maillages doivent résoudre la plus petite échelle ε. Les méthodes numériques d'homogénéisation comme la *heterogeneous multiscale method* (HMM) [7] (voir [2] dans le contexte de problèmes paraboliques linéaires, et l'article de revue [1]) permettent de calculer efficacement la solution homogénéisée u^0, mais aussi la solution oscillante u^ε à ε fixé en se basant sur l'approximation du modèle asymptotique, qui suppose que ε est très petit, ainsi que des techniques de correcteurs [5,10]. Cependant, si ε n'est pas petit, ce type d'approche tombe en défaut.

Dans ce travail, nous proposons une méthode qui permet d'approcher la solution u^ε pour n'importe quelle valeur de $\varepsilon \in (0,1]$, à paramètres numériques fixés indépendamment de ε. Ce type d'approche est dit *Asymptotic Preserving* [11] : un tel schéma est cohérent avec le problème initial pour tout ε fixé et dégénère quand $\varepsilon \to 0$ en un schéma numérique cohérent avec le modèle asymptotique.

Notre approche est basée sur une reformulation du problème initial en un problème augmenté (voir (5) et les notations (6)) satisfait par $U^\varepsilon(t,x,y)$, dans lequel les échelles lentes x et rapides $y = x/\varepsilon$ sont considérées indépendantes. La solution $u^\varepsilon(t,x)$ du problème initial peut alors être retrouvée grâce à la relation $U^\varepsilon(t,x,y=x/\varepsilon) = u^\varepsilon(t,x)$. Dans le problème (5), une raideur apparaît devant le terme $LU^\varepsilon = \nabla_y \cdot (a(x,y)\nabla_y U^\varepsilon)$, qui permet de s'inspirer de méthodes de développement asymptotique largement utilisées en théorie cinétique pour construire des schémas numériques multi-échelles (voir [13]). Nous décomposons en effet la solution du problème augmenté U^ε sous la forme $U^\varepsilon(t,x,y) = F^\varepsilon(t,x) + G^\varepsilon(t,x,y)$, où F^ε est la projection orthogonale de U^ε sur le noyau de L. Cette décomposition permet de reformuler de façon équivalente le problème augmenté en un système d'équations micro–macro satisfait par F^ε et G^ε. Notons que ce système ne contient aucune approximation et reste exact pour toute valeur de ε.

Nous nous basons ensuite sur cette décomposition pour construire un schéma numérique multi-échelles. Grâce à une discrétisation en temps semi-implicite (inspirée de [13]), un schéma *Asymptotic Preserving* est alors obtenu. Ce schéma nécessite l'inversion au niveau numérique de l'opérateur L (à x fixé), comme dans le cas de la résolution numérique du problème homogénéisé (voir [7]).

Bien que la méthodologie soit présentée ici en dimension quelconque, nous effectuons des tests numériques uniquement en dimension 1. Le bon comportement du schéma pour différents $\varepsilon \in (0,1]$ est mis en évidence en le comparant à une méthode directe et à la solution du problème homogénéisé. L'analyse du cas multi-dimensionnel avec une méthode d'éléments finis est en cours d'étude. Cette note constitue une version abrégée d'un travail plus détaillé [6].

1. Introduction

For $T > 0$ and a smooth bounded domain $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, we consider the following class of parabolic problems

$$\partial_t u^\varepsilon = \nabla_x \cdot \left[a(x, x/\varepsilon)\nabla_x u^\varepsilon\right] + f(t,x), \quad t \in (0,T), \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

where $u^\varepsilon(t=0,x) = g(x)$ is a given initial condition in $L^2(\Omega)$, $f \in L^2(0,T,L^2(\Omega))$ is a given source term, and we take for simplicity homogeneous Dirichlet boundary conditions $u^\varepsilon = 0$ in $(0,T)\times\partial\Omega$. The tensor $a(x,y) \in \mathbb{R}^{d\times d}$ is assumed symmetric, uniformly elliptic and bounded, and periodic with respect to the variable $y = x/\varepsilon \in Y = (0,1)^d$. The homogenization analysis as $\varepsilon \to 0$ of such a multiscale problem is well known and can be done using a two-scale convergence analysis, see [4,5,3,10]. The problem (1) admits a unique solution u^ε is the space $L^2(0,T;H^1_0(\Omega))$, which converges towards an asymptotic solution u^0 as $\varepsilon \to 0$,

$$u^\varepsilon \to u^0 \text{ strongly in } L^2(0,T;L^2(\Omega)), \quad u^\varepsilon \rightharpoonup u^0 \text{ weakly in } L^2(0,T;H^1_0(\Omega)),$$

where $u^0 \in L^2(0,T;H^1_0(\Omega))$ solves an effective non-oscillatory problem of the same form as (1),

$$-\nabla_y \cdot [a(x,y)[\nabla_x u^0 + \nabla_y u_1]] = 0, \quad x \in \Omega, \, y \in Y, \tag{2}$$

$$\partial_t u^0 - \nabla_x \cdot \left[\int_Y a(x,y)[\nabla_x u^0 + \nabla_y u_1]\mathrm{d}y\right] = f, \quad x \in \Omega, \tag{3}$$

with the same initial and boundary conditions for u^0 in (3) as for u^ε and involving the elliptic "cell problem" (2) with solution $u_1(t,x,\cdot) \in H^1_{\mathrm{per}}(Y)$, periodic with zero average with respect to the second variable y. Taking advantage of the separation of micro- and macroscales, numerical homogenization methods exploit the above homogenization result to compute efficiently the solution to (1) in the asymptotic regime $\varepsilon \to 0$. For instance, such an efficient method is the heterogeneous

Download English Version:

https://daneshyari.com/en/article/10181014

Download Persian Version:

https://daneshyari.com/article/10181014

Daneshyari.com