C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 354 (2016) 470–474

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Ordinary differential equations/Analytic geometry

On the number of fibrations transverse to a rational curve in complex surfaces

Sur le nombre de fibrations transverses à une courbe rationnelle dans une surface

Maycol Falla Luza [a,1], Frank Loray [b,2]

[a] *UFF, Universidad Federal Fluminense, rua Mário Santos Braga S/N, Niterói, RJ, Brazil*
[b] *IRMAR, Université de Rennes-1, 35042 Rennes cedex, France*

ARTICLE INFO

Article history:
Received 2 February 2016
Accepted after revision 7 March 2016
Available online 30 March 2016

Presented by Claire Voisin

ABSTRACT

We investigate the existence, and lack of uniqueness, of a holomorphic fibration by discs transverse to a rational curve in a complex surface.

RÉSUMÉ

Nous étudions l'existence et le défaut d'unicité de fibrations holomorphes en disques transverses à une courbe rationnelle dans une surface complexe.
© 2016 Académie des sciences. Published by Elsevier Masson SAS. All rights reserved.

Version française abrégée

Soit U une surface complexe contenant une courbe rationnelle lisse C. On s'intéresse à la structure du germe de voisinage (U, C). Lorsque $C^2 \leq 0$, il est bien connu que (U, C) est holomorphiquement équivalent au voisinage de la section nulle dans l'espace total du fibré normal N_C (see [2,7]) ; on dit alors que (U, C) est *linéarisable*. On déduit aisément l'existence de nombreuses fibrations holomorphes par disques transverse à C dans ce cas. D'un autre côté, lorsque $C^2 > 0$, il y a un gros espace de module de germes de tels voisinages (U, C) modulo isomorphismes (voir [3,6]). A contrario, nous montrons qu'il y a très peu de fibrations transverses (en général aucune) dans ce cas. Il y a des familles de dimension infinie de voisinages sans (resp. avec une unique) fibration pour chaque $C^2 > 0$. Lorsque $C^2 = +1$, il existe aussi des familles de dimension infinie de voisinages avec exactement deux fibrations. Notre résultat principal est le suivant.

Théorème A. *Soit (U, C) un germe de surface au voisinage d'une courbe rationnelle C (tout est lisse) avec auto-intersection $C^2 > 0$.*

E-mail addresses: maycolfl@impa.br (M. Falla Luza), frank.loray@univ-rennes1.fr (F. Loray).
[1] IRMAR-Rennes1/IME-UFF.
[2] IRMAR-Rennes1.

http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2016.03.002
1631-073X/

– *si (U, C) admet au moins 3 fibrations holomorphes transverses à C, alors $C^2 = 1$ et (U, C) est linéarisable, i.e. holomorphiquement équivalent au voisinage d'une droite dans $\mathbb{P}^2$.*
– *si $C^2 > 1$ et (U, C) admet au moins 2 fibrations holomorphes transverses à C, alors $C^2 = 2$ et (U, C) est holomorphiquement équivalent au voisinage de la diagonale dans $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.*

Un analogue non linéaire de la dualité projective entre les points et les droites de $\mathbb{P}^2$ établie par Le Brun (voir [5, §1.3, 1.4]) nous fournit une correspondance bi-univoque entre les germes de voisinages (U, C) avec $C^2 = 1$ et les germes de structures projectives en $(\mathbb{C}^2, 0)$ modulo $\mathrm{Diff}(\mathbb{C}^2, 0)$ (tout est holomorphe). Par une structure projective, on entend une collection de géodésiques (une courbe passant par chaque point et chaque direction) définie par une connexion affine (i.e. une connexion linéaire sur le fibré tangent). De ce point de vue, on a une correspondance bi-univoque entre les fibrations transverses à C et les décompositions de la famille de géodésiques comme pinceau de feuilletages (voir, par exemple, [4]), ou encore de connexions affines à courbure nulle définissant la structure.

Tous les résultats présentés dans cette note seront détaillés dans [1].

1. Introduction

Let U be a smooth complex surface containing a smooth rational curve C. We want to understand the structure of the germ of neighborhood (U, C). When $C^2 \leq 0$, it is known that (U, C) is holomorphically equivalent to the neighborhood of the zero section in the normal bundle N_C (see [2,7]). In this case, we say that (U, C) is *linearizable*, and one can easily deduce the existence of many fibrations by discs transverse to C. On the other hand, when $C^2 > 0$, there is a huge moduli space of germs of neighborhoods (U, C) (see [3,6]). However, we prove that there are very few (in general there are not) transverse fibrations in this latter case. There are infinite dimensional families of neighborhoods without (resp. with a unique) fibration for any $C^2 > 0$. When $C^2 = +1$, there also exist infinite dimensional families of neighborhoods with exactly 2 fibrations. Our main result is the following.

Theorem 1.1. *Let (U, C) be a germ of surface neighborhood of a rational curve C with self-intersection $C^2 > 0$, everything being smooth.*

– *If (U, C) admits at least 3 distinct fibrations by discs transverse to C, then $C^2 = 1$ and (U, C) is linearizable, i.e. holomorphically equivalent to the neighborhood of a line in $\mathbb{P}^2$.*
– *If $C^2 > 1$ and (U, C) admits at least 2 distinct fibrations by discs transverse to C, then $C^2 = 2$ and (U, C) is holomorphically equivalent to the neighborhood of the diagonal in $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.*

A non-linear analogue of the projective duality between lines and points in $\mathbb{P}^2$ established by Le Brun (see [5, §1.3, 1.4]) provides a one-to-one correspondence between germs of neighborhoods (U, C) with $C^2 = 1$ and germs of projective structure at $(\mathbb{C}^2, 0)$ up to $\mathrm{Diff}(\mathbb{C}^2, 0)$ (everything is holomorphic). By a projective structure, we mean a collection of geodesics (one curve for each point+direction) defined by an affine connection (i.e. a linear connection on the tangent bundle). From this point of view, there is a one-to-one correspondence between fibrations transverse to C and decompositions of the projective structure as a pencil of foliations (see for instance [4]), or equivalently affine connections with vanishing curvature.

2. Normal form

Let us fix a coordinate $x : C \xrightarrow{\sim} \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ and decompose it as $C = V_0 \cup V_\infty$, where V_i are disks around $x = i$ with $i = 0, \infty$ overlapping on a neighborhood of the circle $\{|x| = 1\}$. It is easy to see that a germ of surface (U, C) can always be obtained by gluing two open sets $U_0 = V_0 \times \mathbb{D}_\epsilon$ and $U_\infty = V_\infty \times \mathbb{D}_\epsilon$, with coordinates (x_i, y_i) by some analytic diffeomorphism of the form

$$(x_\infty, y_\infty) = \Phi(x_0, y_0) = \left(x_0^{-1} + \sum_{n\geq 1} a_n(x_0) y_0^n, \sum_{n\geq 1} b_n(x_0) y_0^n \right),$$

which we shall call the *cocycle* of the germ (U, C). In restriction to C, we have $x = x_0 = 1/x_\infty$. Of course, different cocycles could give rise to isomorphic germs of surface. In this sense, it is shown in [6] that we can always arrive to an almost unique normal form. In the special case $C^2 = 1$, we obtain the slightly more precise statement below.

Theorem 2.1. *Let (U, C) be a germ of surface with $C^2 = 1$. Then, we can choose the corresponding cocycle in the following* normal form

$$\Phi = \left(\frac{1}{x} + \sum_{n\geq 4} (\sum_{k=3}^{n-1} \frac{a_{k,n}}{x^k}) y^n, \frac{y}{x} + \sum_{n\geq 3} (\sum_{k=2}^{n-1} \frac{b_{k,n}}{x^k}) y^n \right).$$