C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I ••• (••••) •••–•••

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Partial differential equations

Relative entropy for compressible Navier–Stokes equations with density-dependent viscosities and applications

Entropie relative pour les équations de Navier–Stokes compressibles avec viscosités dépendant de la densité

Didier Bresch [a,1], Pascal Noble [b,2], Jean-Paul Vila [b]

[a] *LAMA – UMR5127 CNRS, Bât. Le Chablais, Campus scientifique, 73376 Le Bourget-du-Lac, France*
[b] *IMT, INSA Toulouse, 135, avenue de Rangueil, 31077 Toulouse cedex 9, France*

ARTICLE INFO

Article history:
Received 21 May 2015
Accepted 5 October 2015
Available online xxxx

Presented by Gilles Lebeau

ABSTRACT

Recently A. Vasseur and C. Yu have proved (see A. Vasseur, C. Yu, Existence of global weak solutions for 3D degenerate compressible Navier–Stokes equations, arXiv:1501.06803, 2015) the existence of global entropy-weak solutions to the compressible Navier–Stokes equations with viscosities $\nu(\varrho) = \mu\varrho$ and $\lambda(\varrho) = 0$ and a pressure law under the form $p(\varrho) = a\varrho^\gamma$ with $a > 0$ and $\gamma > 1$ constants. In this note, we propose a non-trivial relative entropy for such system in a periodic box and give some applications. This extends, in some sense, results with constant viscosities recently initiated by E. Feireisl, B.J. Jin and A. Novotny in [*J. Math. Fluid Mech.* (2012)]. We present some mathematical results related to the weak–strong uniqueness, the convergence to a dissipative solution to compressible or incompressible Euler equations. As a by-product, this mathematically justifies the convergence of solutions to a viscous shallow-water system to solutions to the inviscid shallow-water system.

RÉSUMÉ

Récemment, A. Vasseur et C. Yu ont prouvé (voir A. Vasseur, C. Yu, Existence of global weak solutions for 3D degenerate compressible Navier–Stokes equations, arXiv:1501.06803, 2015) l'existence globale de solutions faibles entropiques des équations de Navier–Stokes compressibles avec des viscosités $\nu(\varrho) = \mu\varrho$, $\lambda(\varrho) = 0$ et une pression du type $p(\varrho) = a\varrho^\gamma$, avec $a > 0$ et $\gamma > 1$ deux constantes. Dans cette note, on propose une entropie relative originale pour un tel système, avec cette dépendance des viscosités en la densité, et on donne quelques applications. Ceci étend les résultats avec viscosités constantes initiés par E. Feireisl, B.J. Jin and A. Novotny dans [*J. Math. Fluid Mech.* (2012)]. On présente quelques résultats liés à l'unicité faible–fort, la convergence vers une solution dissipative d'Euler compressible. Ceci justifie en particulier la convergence d'un système de Saint-venant avec viscosité vers son analogue non visqueux.

E-mail addresses: Didier.Bresch@univ-savoie.fr (D. Bresch), pascal.noble@math.univ-toulouse.fr (P. Noble), vila@insa-toulouse.fr (J.-P. Vila).

http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2015.10.003
1631-073X/

Version française abrégée

Dans cette note, on prolonge à un cas de viscosités dépendant de la densité certains résultats maintenant connus dans le cas de viscosités constantes. Plus précisément, on montre que toute solution κ-entropique au sens de [3] satisfait une entropie relative qui permet d'obtenir, par exemple, un résultat d'unicité fort–faible, un résultat de convergence de Navier–Stokes compressible vers Euler compressible. On améliore ici l'entropie relative introduite dans [10], qui demandait l'hypothèse forte d'une viscosité proportionnelle à la pression et qui considérait la dimension un d'espace. Nous nous focaliserons sur le cas $\nu(\varrho) = \mu\rho$ et $\lambda(\varrho) = 0$ (associé aux équations de Saint-Venant), pour lequel un résultat complet d'existence globale de solutions κ-entropique existe : construction de solutions approchées et stabilité sans terme supplémentaire dans le système final. Plus précisément, A. Vasseur et C. Yu ont obtenu (cf. [14]) l'existence globale de solutions faibles de Navier–Stokes compressible satisfaisant la BD-entropie avec viscosité $\nu(\varrho) = \mu\varrho$ et $\lambda(\varrho) = 0$: solution qui est κ-entropique pour tout $\kappa \in (0, 1)$ au sens donné dans [3]. On présente quelques résultats liés à l'unicité faible–fort, la convergence vers une solution dissipative d'Euler compressible. Ceci justifie, en particulier, le lien entre un système de type Saint-Venant avec viscosité et le système de Saint-Venant non visqueux. On mentionne également la convergence vers Euler incompressible. La principale difficulté est la dégénérescence de la viscosité quand la densité s'annule, qui ne permet pas le même contrôle sur la vitesse qu'avec des viscosités constantes. La modulation de la κ-entropie introduite par le premier auteur et ses collaborateurs demande aussi un traitement précis du terme de pression : voir ligne 3 de l'entropie relative (4) et relation (5). On renvoie le lecteur interessé à [4] pour le détail des preuves et une discussion sur l'extension au cas où les viscosités ν et λ satisfont la relation algébrique $\lambda(\varrho) = 2(\nu'(\varrho)\varrho - \nu(\varrho))$: relation introduite pour la première fois par le premier auteur et B. Desjardins dans [2].

1. Introduction

Since the pioneering work of C. Dafermos and of H.-T. Yau, relative entropy methods have become a popular and crucial tool in the study of asymptotic limits and large-time behavior for nonlinear PDEs. In a recent paper, E. Feireisl, B.J. Jin, A. Novotny (see [7]) have introduced relative entropies, suitable weak solutions and weak–strong uniqueness for the compressible Navier–Stokes equations with constant viscosities. The interested reader is referred to [12,6] and references cited therein. Based on such relative entropies, various papers have been dedicated to singular perturbations, see the interesting book [8], the articles [1,13] for instance. See also the recent interesting work by Th. Gallouët, R. Herbin, D. Maltese, A. Novotny in [9], where relative entropy techniques are developed to obtain error estimates for a numerical approximation of the compressible Navier–Stokes equation with constant viscosities.

Here we focus on an adaptation of the results found in [7,1] and [13] to the case of compressible Navier–Stokes equations with *degenerate viscosities* depending on the density and set in a periodic box. Relative entropy for the one-dimensional compressible Navier–Stokes equations with degenerate density dependent viscosity has been, for instance, recently used by B. Haspot in [10] under the strong assumption that the viscosity function $\nu(\varrho)$ is equal to the pressure law $p(\varrho)$ up to a multiplicative constant. This is due to the form of the modulated term in the relative entropy chosen for the quantity coming from the pressure law. The main objective is to get rid of such an assumption and to extend the result to the multi-dimensional in-space case. For that purpose, we will take advantage of the recent κ-entropy introduced recently by the first author, B. Desjardins and E. Zatorska in [3]. We introduce a relative entropy based on a new modulated quantity for the term involving the pressure, which allows us to relax the relation between the viscosity and the pressure required in [10]. By this way we cover the (physical) case $\nu(\varrho) = \mu\varrho$, $\lambda(\varrho) = 0$ and the general pressure $p(\varrho) = a\varrho^\gamma$ with $\gamma > 1$. This corresponds to the recent system for which A. Vasseur and C. Yu [14] have obtained recently global existence of entropy-weak solutions based on the BD-entropy, the Mellet–Vasseur estimates and some original renormalization technics linked to the momentum equations to get rid of extra terms used in previous works (drag and capillary terms). Note that such relative entropy will be used to prove convergence of appropriate schemes for the compressible Navier–Stokes equation with degenerate viscosities in the forthcoming paper [5]. Finally, we present some mathematical results related to the weak–strong uniqueness, the convergence to a dissipative solution to compressible Euler equations. As a by-product, this mathematically justifies the vanishing viscosity limit passage in viscous shallow-water equations systems.

2. The degenerate compressible Navier–Stokes equations and the κ-entropy

Let us recall the compressible Navier–Stokes equations with $\nu(\varrho) = \mu\rho$, $\lambda(\varrho) = 0$:

$$\begin{cases} \partial_t\varrho + \mathrm{div}(\varrho\mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t(\varrho\mathbf{u}) + \mathrm{div}(\varrho\mathbf{u}\otimes u) + \nabla p(\varrho) - 2\mu\mathrm{div}(\varrho D(\mathbf{u})) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

with $D(\mathbf{u}) = (\nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^T)/2$. Recently, in [3], it has been observed that such a compressible Navier–Stokes system may be reformulated through an augmented system. Introducing the intermediate velocity $\mathbf{v} = \mathbf{u} + 2\kappa\mu\nabla\log(\varrho)$, a drift velocity $\mathbf{w} = 2\sqrt{\kappa(1-\kappa)}\mu\nabla\log(\varrho)$ and a mixture coefficient κ, it reads

[1] Research of D.B. was partially supported by the ANR project DYFICOLTI ANR-13-BS01-0003-01.

[2] Research of P.N. was partially supported by the ANR project BoND ANR-13-BS01-0009-01.

Please cite this article in press as: D. Bresch et al., Relative entropy for compressible Navier–Stokes equations with density-dependent viscosities and applications, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I (2015), http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2015.10.003