Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE DIRECT®

C. R. Mecanique 333 (2005) 79–85

COMPTES RENDUS MECANIQUE

http://france.elsevier.com/direct/CRAS2B/

High-Order Methods for the Numerical Simulation of Vortical and Turbulent Flows

A penalization method applied to the wave equation

Aymeric Paccou [a,b,*], Guillaume Chiavassa [a,b], Jacques Liandrat [a,b], Kai Schneider [c]

[a] *L.A.T.P. – CNRS, centre de mathématiques et d'informatique, 39, rue Joliot-Curie, 13453 Marseille cedex 13, France*
[b] *EGIM, IMT, technopole de chateau-Gombert, 13451 Marseille, France*
[c] *Laboratoire de modélisation et simulation numérique en mécanique, UMR 6181 – CNRS et universités d'Aix-Marseille, centre de mathématiques et d'informatique, université de Provence, 39, rue Joliot-Curie, 13453 Marseille cedex 13, France*

Available online 28 December 2004

Abstract

In this Note we investigate the mathematical properties of the volume penalization method applied to the one-dimensional wave equation. Generally speaking, the penalization method allows one to handle complex geometries by simply adding a term to the equation to impose the boundary conditions. We study the convergence of the method with regards to the penalization parameter and we present error and stability analyses for the wave equation. Numerical simulations using a finite difference scheme illustrate the results. ***To cite this article: A. Paccou et al., C. R. Mecanique 333 (2005).***

Résumé

Une méthode de pénalisation appliquée à l'équation des ondes. Nous étudions une méthode de pénalisation pour l'équation des ondes unidimensionelle. Nous présentons une analyse de convergence théorique et une vérification numérique dans le cadre d'une discrétisation uniforme par différences finies. ***Pour citer cet article : A. Paccou et al., C. R. Mecanique 333 (2005).***

Keywords: Computational fluid mechanics; Volume penalization; Wave equation

Mots-clés : Mécanique des fluides numérique ; Méthode de pénalisation ; Équation des ondes

Version française abrégée

Une des difficultés principale des simulations numériques de phénomènes physiques réels réside dans la prise en compte de géométries complexes. De nombreuses méthodes ont été développées (changements de coordonnées, maillages adaptés,...) mais l'une des plus simple à mettre en oeuvre en pratique, est la méthode de pénalisation

* Corresponding author.
E-mail addresses: paccou@cmi.univ-mrs.fr (A. Paccou), cassa@esm2.imt-mrs.fr (G. Chiavassa), liandrat@esm2.imt-mrs.fr (J. Liandrat), kschneid@cmi.univ-mrs.fr (K. Schneider).

1631-0721/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crme.2004.09.019

introduite par Arquis et Caltagirone [3]. Elle consiste à modéliser un obstacle solide par un milieu de porosité η, puis à faire tendre vers zéro cette porosité que l'on appelle aussi le paramètre de pénalisation.

De nombreuses simulations numériques utilisant cette méthode ont été réalisées depuis à partir de techniques de discrétisation aussi diverses que les différences finies, les volumes finis [4,5,16], les méthodes pseudo-spectrales [6,2,14,7,8] ou encore les méthodes ondelettes [9], pour ne citer que quelques références.

L'analyse mathématique de la convergence de cette méthode a été effectuée par Angot et al. [15] pour les équations de Navier–Stokes. Une étude très détaillée à également été réalisée par Kevlahan et Ghidaglia [6] sur l'équation de la chaleur unidimensionelle.

Nous nous proposons dans cet article d'étudier les propriétés de la méthode de pénalisation sur une équation hyperbolique simple, l'équation de ondes. Nous présentons une analyse théorique de la convergence que nous comparons aux résultats numériques obtenus par un schéma aux différences finies appliqué à cette équation.

Nous considérons le système (1) décrivant le mouvement d'une corde vibrante fixée en ses extrémités $x = 0$ et $x = \pi$. La solution exacte de ce système est connue, (2), ce qui permettra de comparer avec la solution du système pénalisé.

La condition en $x = 0$, $U(0, t) = 0$, est alors remplacée par l'ajout dans le système (1) du terme $\frac{1}{\eta}\chi_{\mathbb{R}^-}(x)$. Le système pénalisé est alors (3), et la solution est maintenant recherchée sur $]-\infty, \pi[$.

En utilisant une transformée de Laplace en temps, il est possible de calculer analytiquement la solution exacte du système (3) et par la suite l'erreur avec la solution du système (1).

Une majoration de cette erreur en norme L^∞, (5), et en norme L^1, (6), met en évidence une décroissance en $\sqrt{\eta}$ et une propagation dans $[0, \pi]$ à la vitesse c.

Le système (3) est ensuite discrétisé par un schéma aux différences finies et la solution est comparée à la solution exacte (2). La propagation de l'erreur à la vitesse c est visible sur la Fig. 2, alors que la convergence en fonction de η est représentée en Fig. 3.

Le comportement théorique de l'erreur L^1 en $\sqrt{\eta}$ est observé pour $\eta \geqslant \mathrm{d}x^2$ suivit d'une décroissance plus rapide, en $\mathrm{O}(\eta)$, pour $\eta \leqslant \mathrm{d}x^2$.

Ce phénomène a également été observé par Kevlahan et Ghidaglia [6] pour l'équation de la chaleur et pourrait être lié à la résolution de la couche limite au voisinage de $x = t$.

En conclusion, nous avons analysé de façon théorique le comportement de la méthode de pénalisation sur une équation hyperbolique simple. Les résultats ont été vérifiés sur un modèle numérique pour lequel une convergence meilleure que prévue à été observée pour une certaine gamme de paramètres.

Ces travaux sont préliminaires à des simulations numériques des équations d'Euler pénalisées pour des géométries complexes.

1. Introduction

Complex geometries and the treatment of boundary conditions are among the main challenges in modern computational fluid dynamics (CFD). Grid generation plays hereby an important role but different strategies have been developed so far, such as body fitted grids, coordinate transforms, fictious domain approaches (see for example [1]) and surface [2] or volume penalization methods [3].

The latter can be interpreted as modeling solid obstacles in viscous flows by porous media which permeability tends to zero with the so-called penalization parameter η. Using such a method, the geometry of the obstacles can therefore simply be taken into account using a spatially varying permeability coefficient. The motivation to use the penalization method to compute flows in complex geometries comes from the fact that existing numerical codes can be used as the geometry of the flow is simply described by adding a penalization term to the equations. Hence a classical grid, e.g. a Cartesian one, can still be used to compute flows past obstacles of arbitrary shape even moving in time or interacting with the fluid.