C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 354 (2016) 606–610

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Partial differential equations/Mathematical physics

Spectral analysis near the low ground energy of magnetic Pauli operators ☆

Analyse spectrale près du bas niveau d'énergie pour des opérateurs de Pauli magnétiques

Diomba Sambou

Departamento de Matemáticas, Facultad de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Chile, Vicuña Mackenna 4860, Santiago de Chile, Chile

ARTICLE INFO

Article history:
Received 8 November 2015
Accepted after revision 21 February 2016
Available online 1 April 2016

Presented by the Editorial Board

ABSTRACT

We are interested in 3-D magnetic Pauli operators perturbed by a 2×2 Hermitian matrix-valued potential $V = V(x)$, $x \in \mathbb{R}^3$. We extend to the Pauli case the Breit–Wigner-type approximation and trace formula results obtained for the 3-D Schrödinger operator near the Landau levels. Hence, we give a link between the resonances and the spectral shift function near the low ground energy of the operators.

RÉSUMÉ

On s'intéresse à des opérateurs magnétiques 3-D de Pauli perturbés par un potentiel matriciel 2×2 hermitien $V = V(x)$, $x \in \mathbb{R}^3$. Nous étendons au cas Pauli des résultats d'approximation de type Breit–Wigner et de formule trace obtenus pour l'opérateur de Schrödinger 3-D près des niveaux de Landau. Ainsi, nous établissons un lien entre les résonances et la fonction de décalage spectrale près du bas niveau d'énergie des opérateurs.

Version française abrégée

On considère des opérateurs de Pauli H_V définis comme suit. Notant $x = (x_1, x_2, x_3)$ les variables habituelles de $\mathbb{R}^3$, soit $\mathbf{B} = (0, 0, b)$ un champ magnétique de direction constante tel que $b = b(x_1, x_2)$ soit *un champ magnétique admissible*, c'est-à-dire qu'il existe une constante $b_0 > 0$ satisfaisant $b(x_1, x_2) = b_0 + \tilde{b}(x_1, x_2)$, où $\tilde{b}$ est une fonction telle que l'équation de Poisson $\Delta\tilde{\varphi} = \tilde{b}$ admette une solution $\tilde{\varphi} \in C^2(\mathbb{R}^2)$ vérifiant $\sup_{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2} |D^\alpha \tilde{\varphi}(x_1, x_2)| < \infty$, $\alpha \in \mathbb{N}^2$, $|\alpha| \le 2$. Considérons

☆ This research is partially supported by the Chilean Program *Núcleo Milenio de Física Matemática RC*120002. The author wishes to express his gratitude to V. Bruneau for suggesting the study of this problem, and thank the anonymous referee for helpful remarks.

E-mail address: disambou@mat.uc.cl.

http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2016.02.007
1631-073X/

$\mathbf{A}:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un potentiel magnétique associé (i.e. $\mathbf{B} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}$) tel que $\mathbf{A} = \big(A_1(x_1,x_2), A_2(x_1,x_2), 0\big)$. Pour $V = \{V_{\ell k}(x)\}_{\ell,k=1}^2$ une matrice 2×2 hermitienne, l'opérateur de Pauli H_V agissant sur $L^2(\mathbb{R}^3,\mathbb{C}^2)$ est défini par

$$H_V := \begin{pmatrix} (-\mathrm{i}\nabla - \mathbf{A})^2 - b & 0 \\ 0 & (-\mathrm{i}\nabla - \mathbf{A})^2 + b \end{pmatrix} + V.$$

Pour $V = 0$, il est connu que le spectre de H_0 est $[0,+\infty)$. Dans cette note, V est supposée vérifier

$$0 \not\equiv V \in C^0(\mathbb{R}^3), \quad |V_{\ell k}(x)| \lesssim \langle (x_1,x_2)\rangle^{-m_\perp} e^{-\delta\langle x_3\rangle}, \quad 1 \le \ell, k \le 2, \tag{$\mathbf{H}$}$$

où $m_\perp > 2$, $\delta > 0$ sont des constantes fixées, et $\langle y\rangle := \sqrt{1+|y|^2}$ pour $y \in \mathbb{R}^d$. Sous l'hypothèse (**H**), pour z assez petit, $z \mapsto \mathrm{e}^{-\delta\langle x_3\rangle/2}\big(H_V - z\big)^{-1}\mathrm{e}^{-\delta\langle x_3\rangle/2}$ admet un prolongement méromorphe sur une surface de Riemann localement à deux feuillets $\mathcal{M}$ de $\mathbb{C}^*\setminus[\zeta,\infty)$, où $\zeta > 0$ est une constante explicite. Les *résonances* de H_V près de 0 sont définies comme étant les pôles de cette extension.

Il est bien connu que, puisque la différence $(H_V - \mathrm{i})^{-1} - (H_0 - \mathrm{i})^{-1}$ est de trace classe, il existe une unique $\xi = \xi(\cdot; H_V, H_0) \in L^1\big(\mathbb{R}; (1+E^2)^{-1}\mathrm{d}E\big)$, avec la condition de normalisation $\xi(E; H_V, H_0) = 0$ pour tout $E \in \big(-\infty, \inf\sigma(H_V)\big)$. La fonction $\xi(\cdot; H_V, H_0)$ est appelée *la fonction de décalage spectrale* associée à la paire d'opérateurs (H_V, H_0).

Dans la suite, on fixe la constante $N_{\delta,\zeta} := \min\big(\frac{\delta}{2}, \sqrt{\zeta}\big)$. Soient $\mathscr{W}_\pm \Subset \Omega_\pm$ des ouverts relativement compacts de $\pm]0, N_{\delta,\zeta}^2[\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}]-2\theta_0, 2\varepsilon_0[}$ tels que $0 < \min(\theta_0,\varepsilon_0)$ et $\max(\theta_0,\varepsilon_0) < \frac{\pi}{2}$. Soit $r > 0$ un petit paramètre, et supposons que $\mathscr{W}_\pm$ et $\Omega_\pm$ soient simplement connexes ne dépendant pas de r. On suppose aussi que les intersections de $\pm]0, N_{\delta,\zeta}^2[$ avec $\mathscr{W}_\pm$, $\Omega_\pm$ sont des intervalles. On pose $I_\pm := \mathscr{W}_\pm \cap \pm]0, N_{\delta,\zeta}^2[$. L'ensemble des résonances de H_V est noté $\mathrm{Res}\,(H_V)$. Nos résultats sont les suivants.

Théorème 0.1 *(Approximation de Breit–Wigner). Supposons l'hypothèse* (**H**) *vérifiée. Soient $\mathscr{W}_\pm \Subset \Omega_\pm$ des ouverts relativement compacts comme ci-dessus. Fixons $0 < s_1 < \sqrt{\mathrm{dist}\big(\Omega_\pm, 0\big)}$. Il existe une valeur $r_0 > 0$ et des fonctions $g_\pm$ holomorphes dans $\Omega_\pm$ vérifiant, pour tout $E \in rI_\pm$ et $r < r_0$,*

$$\xi'(E) = \frac{1}{r\pi}\mathrm{Im}\, g_\pm'\left(\frac{E}{r}, r\right) + \sum_{\substack{w\in \mathrm{Res}(H_V)\cap r\Omega_\pm \\ \mathrm{Im}(w)\neq 0}} \frac{\mathrm{Im}(w)}{\pi|E-w|^2} - \sum_{w\in\mathrm{Res}(H_V)\cap rI_\pm} \delta(E-w), \tag{0.1}$$

où $g_\pm(z,r) = \mathcal{O}\big(|\ln r| r^{-1/m_\perp}\big)$, uniformément par rapport à $0 < r < r_0$ et $z \in \Omega_\pm$.

Théorème 0.2 *(Formule trace). Considérons des domaines $\mathscr{W}_\pm \Subset \Omega_\pm$ comme dans le Théorème 0.1. Supposons que $f_\pm$ soient holomorphes dans un voisinage de $\Omega_\pm$, et soient $\psi_\pm \in C_0^\infty\big(\Omega_\pm \cap \mathbb{R}\big)$ telles que $\psi_\pm(\lambda) = 1$ près de $\Omega_\pm \cap \mathbb{R}$. Sous les hypothèses du Théorème 0.1, on a la formule*

$$\mathrm{Tr}\left[(\psi_\pm f_\pm)\left(\frac{H_V}{r}\right) - (\psi_\pm f_\pm)\left(\frac{H_0}{r}\right)\right] = \sum_{w\in\mathrm{Res}(H_V)\cap r\mathscr{W}_\pm} f_\pm\left(\frac{w}{r}\right) + E_{f_\pm,\psi_\pm}(r), \tag{0.2}$$

avec $|E_{f_\pm,\psi_\pm}(r)| \le M(\psi_\pm)\sup\big\{|f_\pm(z)| : z \in \Omega_\pm\setminus\mathscr{W}_\pm : \mathrm{Im}(z) \le 0\big\} \times N(r)$, où $N(r) = \mathcal{O}\big(|\ln r| r^{-1/m_\perp}\big)$.

Remarque 0.1. Dans le cas « $-$ », les résonances de H_V près de 0 dans Ω_- sont des valeurs propres négatives. Puisque dans ce cas ξ est une fonction de comptage, les Théorèmes 0.1 et 0.2 sont triviaux avec g_- et E_{f_-,ψ_-} nulles.

1. Introduction and results

In this note, we consider some magnetic Pauli operators H_V defined as follows. Denoting $x = (x_1,x_2,x_3)$ the usual variables of $\mathbb{R}^3$, let $\mathbf{B} = (0,0,b)$ be a nice scalar magnetic field with constant direction such that $b = b(x_1,x_2)$ is *an admissible magnetic field*. That is, there exists a constant $b_0 > 0$ satisfying $b(x_1,x_2) = b_0 + \tilde{b}(x_1,x_2)$, where $\tilde{b}$ is a function such that the Poisson equation $\Delta\tilde{\varphi} = \tilde{b}$ admits a solution $\tilde{\varphi} \in C^2(\mathbb{R}^2)$ verifying $\sup_{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2}|D^\alpha\tilde{\varphi}(x_1,x_2)| < \infty$, $\alpha \in \mathbb{N}^2$, $|\alpha| \le 2$. Consider $\mathbf{A}:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ an associated magnetic potential (i.e. $\mathbf{B} = \mathrm{curl}\,\mathbf{A}$) such that $\mathbf{A} = \big(A_1(x_1,x_2), A_2(x_1,x_2), 0\big)$. Then, for a 2×2 Hermitian matrix $V = \{V_{\ell k}(x)\}_{\ell,k=1}^2$, the magnetic Pauli operator H_V acting on $L^2(\mathbb{R}^3) := L^2(\mathbb{R}^3,\mathbb{C}^2)$ is defined by

$$H_V := \begin{pmatrix} (-\mathrm{i}\nabla - \mathbf{A})^2 - b & 0 \\ 0 & (-\mathrm{i}\nabla - \mathbf{A})^2 + b \end{pmatrix} + V.$$

For $V = 0$, it is known that the spectrum of H_0 is $[0,+\infty)$ (see, e.g., [8]). Throughout our exposition, we assume that V satisfies

$$0 \not\equiv V \in C^0(\mathbb{R}^3), \quad |V_{\ell k}(x)| \lesssim \langle (x_1,x_2)\rangle \mathrm{e}^{-m_\perp} \mathrm{e}^{-\delta\langle x_3\rangle}, \quad 1 \le \ell, k \le 2, \tag{$\mathbf{H}$}$$

for some constants $m_\perp > 2$, $\delta > 0$, and $\langle y\rangle := \sqrt{1+|y|^2}$ for $y \in \mathbb{R}^d$.