ScienceDirect
Disponible en www.sciencedirect.com

Revista Iberoamericana de Automática e Informática industrial 12 (2015) 434–445

www.elsevier.es/RIAI

Metodología formal de análisis del comportamiento dinámico de sistemas no lineales mediante lógica borrosa

Antonio Javier Barragán[a,*], Basil Mohammed Al-Hadithi[b], José Manuel Andújar[a], Agustín Jiménez[b]

[a]Dep. de Ing. Electrónica, de Sistemas Electrónicos y Automática, Universidad de Huelva.
[b]Groupo de Control Inteligente, Universidad Politécnica de Madrid, Centro de Automatización y Robótica UPM - CSIC

Resumen

Tener la capacidad para analizar un sistema desde un punto de vista dinámico puede ser muy útil en muchas circunstancias (sistemas industriales, biológicos, económicos, ...). El análisis dinámico de un sistema permite conocer su comportamiento y la respuesta que presentará a distintos estímulos de entrada, su estabilidad en lazo abierto, tanto local como global, o si está afectado por fenómenos no lineales, como ciclos límites o bifurcaciones, entre otros. Si el sistema es desconocido o su dinámica es lo suficientemente compleja como para no poder obtener un modelo matemático del mismo, en principio no sería posible realizar un análisis dinámico formal del sistema. En estos casos la lógica borrosa, y más concretamente los modelos borrosos de tipo Takagi-Sugeno (TS), se presentan como una herramienta muy poderosa de análisis y diseño. Los modelos borrosos TS son aproximadores universales tanto de una función como de su derivada, por lo que permiten modelar sistemas no lineales en base a datos de entrada/salida. Puesto que un modelo borroso es un modelo matemático formalmente hablando, a partir del mismo es posible estudiar aspectos de la dinámica del sistema real que modela tal como se hace en la teoría de control no lineal. En este artículo se presenta una metodología para la obtención de los estados de equilibrio de un sistema no lineal, la linealización exacta de su modelo borroso de estado completamente general, el estudio de la estabilidad local de los equilibrios a partir de dicha linealización, y la utilización de la metodología de Poincare para el estudio de órbitas periódicas en modelos borrosos. A partir de esa información, es posible estudiar la estabilidad local de los estados de equilibrio, así como la dinámica del sistema en su entorno y la presencia de oscilaciones, obteniéndose una valiosa información del comportamiento dinámico del sistema.

Palabras Clave: Análisis dinámico, estabilidad, estado de equilibrio, linealización, metodología de Poincaré, modelado borroso, sistemas dinámicos, Takagi-Sugeno (TS) model

1. Introducción

El análisis dinámico de un sistema permite conocer su comportamiento y la respuesta que el mismo presentará a distintos estímulos de entrada. Si el sistema es desconocido o su dinámica es lo suficientemente compleja como para no poder obtener un modelo matemático del mismo (López-Baldán et al., 2002), en principio no sería posible realizar un análisis dinámico formal del sistema. Si no se posee un modelo matemático, bien sea por desconocimiento del funcionamiento interno del sistema, o por la excesiva complejidad del mismo, se puede generar un modelo en base a datos de entrada-salida del sistema y, a partir de este modelo, estudiar la dinámica del sistema original.

La herencia tradicional de la ingeniería de control ha sido lineal, de hecho, cuando es posible asumir, como ocurre en muchas aplicaciones, que los problemas son suficientemente locales, es permisible obtener su solución usando métodos lineales. Sin embargo, cuando los problemas son de naturaleza global, el uso de métodos no lineales se convierte en una necesidad.

La razón fundamental que exige el uso de modelos no lineales es que la dinámica de los modelos lineales no es lo suficientemente rica como para describir una serie de fenómenos que se dan de forma asidua en la vida real (Marquez, 2003, Andújar et al., 2004, Andújar y Bravo, 2005). El comportamiento dinámico de los sistemas lineales, independientemente de su orden, está gobernado esencialmente por los autovalores de su matriz de estado. Sin embargo, los sistemas no lineales tienen un comportamiento mucho más variado, pudiendo originar oscilaciones autoexcitadas, conocidas como *ciclos límite*, un comportamiento aperiódico y críticamente sensibles a las condiciones iniciales, el *caos* (Wiggins, 2003), así como otros fenóme-

*Autor en correspondencia.
Correos electrónicos: antonio.barragan@diesia.uhu.es (Antonio Javier Barragán), basil@etsii.upm.es (Basil Mohammed Al-Hadithi), andujar@diesia.uhu.es (José Manuel Andújar), ajimenez@etsii.upm.es@etsii.upm.es (Agustín Jiménez)

http://dx.doi.org/10.1016/j.riai.2015.09.005

nos dinámicos exclusivos de los sistemas no lineales, como la existencia de múltiples estados de equilibrio y las bifurcaciones (Sastry, 1999), entre otros.

El punto de partida idóneo en el análisis de un sistema no lineal es su representación mediante un modelo matemático, generalmente un modelo de estado. Cuando el sistema es conocido y su dinámica no es excesivamente compleja, es posible obtener un modelo de estado del sistema; sin embargo, en multitud de ocasiones el sistema objeto de estudio puede ser demasiado complejo, ya sea por su dinámica o por su dimensión, o simplemente porque se desconocen las ecuaciones que gobiernan su funcionamiento. En estos casos, la lógica borrosa se presenta como una poderosa herramienta ya que permite modelar sistemas altamente no lineales a partir de datos de entrada-salida. Esta modelización puede ser cualitativa (Grande et al., 2005, Andújar et al., 2006, Aroba et al., 2007, Jiménez et al., 2009) o estrictamente analítica, aprovechando el hecho de que los sistemas TS son aproximadores universales tanto de la función (Kosko, 1994, Wang, 1992) como de su derivada (Kreinovich et al., 2000, Mencattini et al., 2005). Por lo tanto, aunque el sistema sea desconocido, es factible obtener un modelo borroso del mismo. Un modelo borroso es un modelo matemático formalmente hablando, así pues, a partir de este modelo es posible estudiar aspectos de la dinámica del sistema real siempre que su precisión sea suficiente. Esta forma de abordar el problema permite enfrentarse a sistemas no lineales y de difícil modelización por técnicas matemáticas usuales.

El conocimiento de los estados de equilibrio que posee un sistema, así como la estabilidad de dichos estados, son datos que pueden resultar muy interesantes a la hora de analizar o diseñar un sistema de control. Si se parte de un sistema completamente desconocido, esta información puede aclarar en muchos aspectos el funcionamiento del mismo, así como facilitar el diseño de un sistema de control adecuado.

En este artículo se muestra una metodología para analizar un sistema no lineal general, inicialmente desconocido, a partir de un modelo borroso TS. El artículo está organizado como sigue: en la sección 2 se introduce al lector en la formulación del problema y se presentan las ecuaciones que se utilizarán para la representación del modelo del sistema. En el apartado 3 se presenta la linealización exacta de un modelo TS completamente general. Posteriormente, en la sección 4 se plantea una propuesta de procedimiento para el análisis dinámico del sistema para, en la sección 5 aplicar dicho procedimiento a dos ejemplos. Finalmente se presentan algunas conclusiones.

2. Formulación del problema

Sea n el orden del sistema y m su número de entradas, un modelo TS equivalente de un sistema continuo puede ser representado por (Takagi y Sugeno, 1985, Babuška, 1995, Babuška y Verbruggen, 1995, Nguyen et al., 1995):

$$\begin{aligned} R^{(l,i)}:\ & \text{Si } x_1 \text{ es } A_{1i}^l \text{ y } \ldots \text{ y } x_n \text{ es } A_{ni}^l \\ & \text{y } u_1 \text{ es } B_{1i}^l \text{ y } \ldots \text{ y } u_m \text{ es } B_{mi}^l \\ \text{Entonces } & \dot{x}_i^l = \sum_{k=0}^{n} a_{ki}^l \tilde{x}_k + \sum_{j=1}^{m} b_{ji}^l u_j, \end{aligned} \tag{1}$$

donde $l = 1..M_i$ es el índice de la regla y M_i el número de reglas que modelan la i-ésima ecuación diferencial del proceso, $\dot{x}_i$. $\tilde{x}_k$ es la k-ésima coordenada del vector de estado extendido (Andújar y Barragán, 2005, Andújar et al., 2009, 2014a), siendo $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)^{\mathrm{T}} = (1, x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$.

De esta forma, la salida del modelo borroso puede calcularse a través de la expresión siguiente, que representa el modelo borroso de estado del sistema (Wang, 1994, 1997):

$$\dot{x}_i = f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \sum_{k=0}^{n} a_{ki}\tilde{x}_k + \sum_{j=1}^{m} b_{ji}u_j, \tag{2}$$

donde $a_{ki}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ y $b_{ji}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ son coeficientes variables (Wong et al., 1997) definidos por:

$$a_{ki}(\mathbf{x},\mathbf{u}) = \frac{\sum_{l=1}^{M_i} w_i^l(\mathbf{x},\mathbf{u}) a_{ki}^l}{\sum_{l=1}^{M_i} w_i^l(\mathbf{x},\mathbf{u})},\ b_{ji}(\mathbf{x},\mathbf{u}) = \frac{\sum_{l=1}^{M_i} w_i^l(\mathbf{x},\mathbf{u}) b_{ji}^l}{\sum_{l=1}^{M_i} w_i^l(\mathbf{x},\mathbf{u})} \tag{3}$$

$w_i^l(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ representa el grado de activación de las reglas del modelo del sistema, y los vectores $\boldsymbol{\sigma}_i^l$ y $\boldsymbol{\alpha}_i^l$ representan los conjuntos de parámetros adaptables de los antecedentes de las reglas en los universos de discurso de las variables de estado y las señales de control, respectivamente.

$$w_i^l(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \prod_{k=1}^{n} \mu_{ki}^l(x_k, \boldsymbol{\sigma}_{ki}^l) \prod_{j=1}^{m} \mu_{ji}^l(u_j, \boldsymbol{\alpha}_{ji}^l) \tag{4}$$

3. Linealización de un modelo borroso de estado

La linealización es una de las técnicas más empleadas en el diseño de sistemas de control no lineales. Aunque es una técnica no muy recomendable en muchos casos, ya que se desprecian los efectos de las no linealidades de los sistemas controlados, sí que puede ser válida para controlar sistemas no muy complejos, o cuya dinámica sea conocida, en regiones donde su comportamiento sea aproximadamente lineal.

Además de como método de control, la linealización puede emplearse para obtener información de un sistema no lineal. Es sabido que, con algunas salvedades, el comportamiento de un sistema no lineal en torno a un estado de equilibrio es muy similar al del sistema linealizado en torno a dicho estado (Nijmeijer y Schaft, 1990, Sastry, 1999, Slotine y Li, 1991); por lo tanto, la obtención del sistema lineal equivalente de un modelo borroso no lineal puede ser una herramienta muy útil para obtener información del sistema original.

Sea el modelo de estado genérico de un sistema no lineal dado por:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)\right), \tag{5}$$

el desarrollo en serie de Taylor hasta orden 1 de dicho sistema en torno a un punto $(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$, determina que éste se puede aproximar por la expresión (6), siendo $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ y $\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_0$, y donde las matrices del sistema lineal se calculan mediante las expresiones (7), (8) y (9).