Rev. int. métodos numér. cálc. diseño ing. 2015;**31(1)**:42–49

ELSEVIER DOYMA

Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería

www.elsevier.es/rimni

Avaliação de 3 diferentes aproximações para a solução do problema direto da tomografia de impedância elétrica

J. Santana Martins*, C. Stein Moura* e R.M. Figueiró Vargas*

Programa de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia de Materiais, Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 90619-900, Brasil

INFORMAÇÃO SOBRE O ARTIGO

Historial do artigo:
Recebido a 15 de maio de 2012
Aceite a 1 de outubro de 2013
On-line a 22 de março de 2014

Palavras-chave:
Tomografia por impedância elétrica
Métodos numéricos
Imageamento não invasivo

R E S U M O

Neste trabalho foram comparadas 3 diferentes soluções para o problema direto da tomografia de impedância elétrica utilizando o método das diferenças finitas. Nesta técnica são posicionados elétrodos no contorno/fronteira de um volume a ser estudado e, em 2 deles, são injetados padrões de correntes e, nos elétrodos restantes, realizadas medidas do potencial elétrico. A inversão numérica dos dados permite a reconstrução do domínio analisado. Duas novas aproximações são propostas para o problema direto e comparações são realizadas a partir de resultados disponíveis na literatura. Com o estudo aqui realizado, para uma das aproximações propostas foi observada uma melhora significativa da acurácia comparada aos resultados obtidos com a aproximação da literatura.

Evaluation of three different approximations for the solution of the direct problem on electrical impedance tomography

Keywords:
Electrical impedance tomography
Numerical methods
Non-invasive imaging

A B S T R A C T

The present study compares three different solutions for the direct problem of Electrical Impedance Tomography using the finite difference method. In this technique, electrodes are positioned on the boundary of a volume to be studied, and in two of them current patterns are injected and measurements of electrical potential are made in the remaining electrodes. The numerical inversion of the data allows reconstruction of the analyzed domain. Two new approximations are proposed for the direct problem and comparisons are performed based on results available in the literature. In the study performed here, in one of the proposed approximations it was observed a significant improvement in accuracy compared to results obtained with the approximations in the literature.

1. Introdução

A técnica de tomografia por impedância elétrica (TIE) é um método de imageamento não invasivo, onde são utilizadas informações das propriedades elétricas de um objeto para obtenção de imagens de uma seção transversal do seu interior. Por propriedades elétricas se entendem especificamente a condutividade e a permissividade elétrica. No processo de obtenção de imagens por TIE é necessário alocar elétrodos no contorno de uma determinada região do objeto em conjunto com uma fonte de corrente. A fonte de corrente utiliza 2 dos elétrodos alocados para injetar corrente no interior do domínio e medidas dos potenciais elétricos são realizadas nos demais elétrodos. Um algoritmo matemático reconstrói numericamente imagens de um plano transversal do corpo, a partir dos valores de impedância, condutividade ou permissividade elétrica estimados no plano analisado.

Foram desenvolvidos estudos numéricos aplicados à solução do problema direto da TIE, utilizando para isso o método das diferenças finitas (MDF). Valendo-se desse método foram desenvolvidas 2 novas aproximações e testadas 3 para a equação generalizada de Laplace. Por sua vez, o objetivo desse trabalho é avaliar as 2 aproximações propostas em relação a uma terceira aproximação comumente utilizada na literatura e definir aquela que apresenta melhor equilíbrio entre acurácia, tempo e estabilidade, pensando no emprego dessa aproximação para solução do problema inverso

* Autor para correspondência.
Correios eletrónicos: jefferson.santana@gmail.com (J. Santana Martins), cassio.moura@pucrs.br (C. Stein Moura), rvargas@pucrs.br (R.M. Figueiró Vargas).

0213-1315/$ – see front matter © 2012 CIMNE (Universitat Politècnica de Catalunya). Publicado por Elsevier España, S.L.U. Todos os direitos reservados.
http://dx.doi.org/10.1016/j.rimni.2013.10.002

da TIE, o qual é mal condicionado e, para sua solução, necessita o emprego de técnicas numéricas precisas, velozes[b] e estáveis.

2. Modelagem matemática do problema direto

O problema direto da TIE envolve a determinação da distribuição dos potenciais no interior de uma região Ω e a resposta no contorno $\partial\Omega$, supondo conhecida a distribuição de condutividade. A modelagem matemática desse problema, considerando uma distribuição quase estática de cargas [1,2][c], permite obter uma equação diferencial parcial capaz de modelar o potencial em Ω, a qual é exibida a seguir [1–3]:

$$\vec{\nabla}.(\sigma\,\vec{\nabla}u) = 0 \; em \; \Omega \tag{1}$$

onde u é o potencial e σ é a condutividade elétrica em um ponto qualquer no interior da região.

Propriedades elétricas, tais como a condutividade elétrica e a permissividade elétrica, determinam o comportamento de materiais quando submetidos a campos elétricos externos. Teoricamente seria possível construir um modelo matemático de distribuição de condutividades em Ω ou, de outro modo, também poderia ser construído um modelo levando em consideração apenas a permissividade [4] desta região. Esses 2 modelos podem ser utilizados separados ou conjuntamente para produzir imagens de Ω [5]. No entanto, como pode ser observado na equação (1), um modelo teórico tipicamente utilizado na literatura e utilizado neste artigo considera somente a condutividade do domínio avaliado, ou seja, considera somente o termo real da impedância elétrica.

As condições de contorno (CC) para o problema direto da TIE correspondem aos valores de correntes/potenciais aplicados e medidos no contorno, e satisfazem a seguinte expressão:

$$J_n = -\sigma\frac{\partial u}{\partial n} \; em \; \partial\Omega \tag{2}$$

onde n é um versor normal à superfície do objeto e J_n é a densidade de corrente na direção do versor n.

O problema direto pode ser definido matematicamente como a solução da equação (1) para a condição de contorno (2).

3. O método das diferenças finitas

No MDF o domínio é discretizado na forma de retângulos ou quadrados. Sendo assim, a malha pode ser representada por intervalos definidos por $\Delta x = \frac{x_m}{N}$ e $\Delta y = \frac{y_n}{M}$, onde N e M são números inteiros positivos que representam o número de divisões do domínio nas coordenadas x e y, respectivamente [6]. O ponto nodal (i, j) possui as coordenadas (x_i, y_j), dadas por $x_i = x_0 + \Delta xi$ e $y_j = y_0 + \Delta yj$. O número máximo de linhas em x é denotado por $i_{\max} = N$ e o número total de linhas em y é denotado por $j_{\max} = M$.

Quanto às derivadas na direção normal à $\partial\Omega$, a sua discretização pode ser realizada de diversas maneiras, dependendo do grau de acurácia desejado. No entanto, isso foi realizado utilizando 4 expressões; 2 delas são apresentadas a seguir [7]:

$$\frac{\partial u}{\partial n} \approx \vec{n}.\left(\frac{3u_{i,j} - 4u_{i-1,j} + u_{i-2,j}}{2\Delta x}\vec{i} + \frac{3u_{i,j} - 4u_{i,j-1} + u_{i,j-2}}{2\Delta y}\vec{j}\right) \tag{3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \approx \vec{n}\cdot\left(\frac{3u_{i,j} - 4u_{i+1,j} + u_{i+2,j}}{2\Delta x}\vec{i} + \frac{3u_{i,j} - 4u_{i,j+1} + u_{i,j+2}}{2\Delta y}\vec{j}\right) \tag{4}$$

Duas outras são apresentadas a seguir [8]:

$$\frac{\partial u}{\partial n} \approx \vec{n}\cdot\left(\begin{array}{c}\dfrac{(147u_{i,j} - 360u_{i-1,j} + 450u_{i-2,j} - 400u_{i-3,j} + 225u_{i-4,j} - 72u_{i-5,j} + 10u_{i-6,j})}{60\Delta x}\vec{i}+ \\ \dfrac{(147u_{i,j} - 360u_{i,j-1} + 450u_{i,j-2} - 400u_{i,j-3} + 225u_{i,j-4} - 72u_{i,j-5} + 10u_{i,j-6})}{60\Delta y}\vec{j}\end{array}\right) \tag{5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \approx \vec{n}\cdot\left(\begin{array}{c}\dfrac{(147u_{i,j} - 360u_{i+1,j} + 450u_{i+2,j} - 400u_{i+3,j} + 225u_{i+4,j} - 72u_{i+5,j} + 10u_{i+6,j})}{60\Delta x}\vec{i}+ \\ \dfrac{(147u_{i,j} - 360u_{i,j+1} + 450u_{i,j+2} - 400u_{i,j+3} + 225u_{i,j+4} - 72u_{i,j+5} + 10u_{i,j+6})}{60\Delta y}\vec{j}\end{array}\right) \tag{6}$$

O vetor unitário $\vec{n}$ em coordenadas cartesianas é definido como $\vec{n} = \left[\cos(\theta)\vec{i} + sen(\theta)\vec{j}\right]$, onde θ é o ângulo entre o vetor $\vec{n}$ e o eixo da coordenada x no plano.

Para a solução do problema direto da TIE é necessário discretizar a equação (1). Isso pode ser realizado utilizando a equação a seguir, deduzida nesse trabalho a partir de aproximações por diferenças finitas centradas para a derivada de primeira e de segunda ordem:

$$\begin{aligned} u_{i,j} = {} & \frac{u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}}{4} \\ & + \frac{1}{16.\sigma_{i,j}}\cdot[(\sigma_{i+1,j} - \sigma_{i-1,j})(u_{i+1,j} - u_{i-1,j}) \\ & + (\sigma_{i,j+1} - \sigma_{i,j-1})(u_{i,j+1} - u_{i,j-1})] \end{aligned} \tag{7}$$

Foram testadas ainda 2 outras aproximações para o potencial elétrico em Ω. Uma dessas aproximações é tipicamente encontrada na literatura e foi extraída do trabalho [3].

$$u_{i,j} = \left[\frac{(\sigma_{i+1/2,j}u_{i+1,j}) + (\sigma_{i-1/2,j}u_{i-1,j}) + (\sigma_{i,j+1/2}u_{i,j+1}) + (\sigma_{i,j-1/2}u_{i,j-1})}{(\sigma_{i+1/2,j} + \sigma_{i-1/2,j} + \sigma_{i,j+1/2} + \sigma_{i,j-1/2})}\right] \tag{8}$$

onde, $\sigma_{i+1/2,j}$, $\sigma_{i-1/2,j}$, $\sigma_{i,j+1/2}$ e $\sigma_{i,j-1/2}$, são os valores da condutividade em pontos localizados centralmente entre os pontos (i, j) e $(i+1, j)$, (i, j) e $(i-1, j)$, (i, j) e $(i, j+1)$ e (i, j) e $(i, j-1)$, respectivamente. A condutividade nesses pontos pode ser obtida através do cálculo da média harmônica da condutividade entre as regiões adjacentes avaliadas. Portanto, a condutividade no ponto médio entre os pontos $(i+a, j+b)$ e o ponto (i, j), sendo a e b números inteiros quaisquer, é dada por:

$$\sigma_{i+a/2,\,j+b/2} = \frac{\left(\sigma_{i+a,j+b}\sigma_{i,j}\right)}{\left(\frac{\sigma_{i+a,j+b}+\sigma_{i,j}}{2}\right)} \tag{9}$$

Além das equações (7) e (8), foi proposta uma terceira equação para aproximar o potencial numa região com condutividade heterogênea. As equações (7) e (8) aproximam o potencial em um ponto (i, j), utilizando os 4 pontos adjacentes mais próximos a ele (estêncil de 5 pontos). No entanto, é possível fazer essa mesma aproximação utilizando os 8 pontos adjacentes ao ponto (i, j) (estêncil de 9 pontos). Como uma alternativa para as aproximações (7) e (8), o

[b] Nesse artigo a «velocidade» de uma determinada aproximação numérica é sinônima do custo computacional de processamento da mesma.

[c] Ler páginas 28 e 29 da referência [1].