Rev. int. métodos numér. cálc. diseño ing. 2015;**31(2)**:71–80

Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería

www.elsevier.es/rimni

Pseudoesfuerzos y evaluación de tensiones en modelos hiperviga

S. Monleón[a], C. Lázaro[a,*], J. Casanova[a] y A. Domingo[b]

[a] *Departamento de Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras*
[b] *Departamento de Ingeniería de la Construcción y Proyectos de Ingeniería Civil, Cno. de Vera s/n, 46022, Valencia, España*

INFORMACIÓN DEL ARTÍCULO

Historia del artículo:
Recibido el 16 de octubre de 2013
Aceptado el 9 de enero de 2014
On-line el 23 de julio de 2014

Palabras clave:
Modelos de vigas
Modelo hiperviga
Tensiones en vigas
Esfuerzos en vigas
Teoría de vigas de orden superior

RESUMEN

Este artículo trata la formulación unificada de modelos lineales para la estática de piezas alargadas y, en concreto, la clase de modelos que incluyen desplazamientos generalizados adicionales a los necesarios para definir movimientos de sólido rígido de las secciones transversales. Estos modelos, denominados *modelos hiperviga* por los autores, se caracterizan por el acoplamiento entre variables estáticas y cinemáticas en las ecuaciones de equilibrio. En el artículo se introducen los *pseudoesfuerzos*, nuevas variables estáticas que representan la acción de los enlaces internos que controlan el cambio de forma de la sección transvesal. Asimismo, se desarrolla el procedimiento sistemático para evaluar la distribución de tensiones sobre las secciones transversales consistente con el modelo hiperviga, que aproxima la distribución de tensiones correspondiente a la solución elástica tridimensional. La sistemática de la formulación unificada y su potencia para la construcción de ecuaciones y para la valoración de la influencia de los distintos parámetros que intervienen en la respuesta quedan patentes mediante su aplicación a un problema que requiere la introducción de grados de libertad adicionales a los de sólido rígido: la flexión alabeada. Partiendo únicamente de la cinemática de la sección transversal expresada en función de los desplazamientos generalizados, mediante el procedimiento unificado propuesto, se obtienen las variables, los parámetros y las ecuaciones que determinan la respuesta, así como las expresiones de las tensiones en la sección consistentes con la formulación empleada.

Pseudo forces and stress evaluation in hyper beam models

Keywords:
Beam models
Hyperbeam model
Stresses in beams
Section forces in beams
Higher order beam theory

ABSTRACT

This paper deals with the unified formulation of linear models in rod elastostatics and, specifically, with the class of models including generalized displacements that are additional to those defining rigid body motions of the cross-sections. The main feature of these models, named *hyper beam models* by the authors, is the coupling between static and kinematic variables in the equilibrium equations. New static variables called *pseudo forces* have been introduced to represent the action of the internal constraints which control the deformation of the cross-section. Using the pseudo forces, a systematic procedure to evaluate the model-consistent stress distributions on cross-sections –which is an approximation of the 3D elastic solution– has been developed. The application of the unified formulation to a problem requiring the introduction of non rigid-body-motional degrees of freedom –warped bending– shows its ability to systematically build the equations, and to assess the influence of the intervening parameters. The response-defining variables, parameters and equations, as well as the expressions of consistent stress distributions on the sections, are obtained by means of the proposed unified procedure, parting exclusively from the cross-sectional kinematics expressed in terms of the respective generalized displacements.

* Autor para correspondencia: Universitat Politècnica de València E.T.S. Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos.
Correo electrónico: carlafer@mes.upv.es (C. Lázaro).

http://dx.doi.org/10.1016/j.rimni.2014.01.001
0213-1315/

1. Introducción

La literatura recoge ejemplos diversos de modelos que generalizan las teorías clásicas de vigas. Cabe citar los modelos basados en modos de deformación de la sección transversal propuestos por Schardt y colaboradores, aplicables a problemas lineales y no lineales [1–3], o la formulación desarrollada por Carrera, basada en aproximaciones en serie de McLaurin a los desplazamientos de la sección transversal [4,5]. Otros planteamientos mediante aproximaciones asintóticas de la energía de deformación [6–8] constituyen también herramientas para la generación de modelos de piezas alargadas.

La *formulación unificada* de la teoría de vigas, desarrollada por el primer autor en [9,10], proporciona un marco alternativo que permite expresar de modo abstracto y compacto las variables que intervienen en cualquier modelo de pieza alargada, independientemente de las restricciones cinemáticas que lo definan, y deducir sistemáticamente las correspondientes ecuaciones de campo mediante principios variacionales. Por ello, puede extenderse sin dificultad a problemas no lineales [11] y constituye el marco idóneo para desarrollar los modelos hiperviga. El concepto *hiperviga* fue introducido por los autores [12,13] para describir la *clase de modelos lineales* de piezas alargadas que incluyen desplazamientos generalizados adicionales a los necesarios para describir movimientos de sólido rígido (de pequeña magnitud) de las secciones transversales. Los modelos hiperviga se caracterizan por el acoplamiento entre variables estáticas y cinemáticas presente en las ecuaciones de equilibrio, aun en su formulación lineal. En otras palabras, no es posible expresar las ecuaciones de equilibrio de la estructura en función, únicamente, de los esfuerzos y las cargas exteriores; en este caso también aparecen los desplazamientos. La elección del término hiperviga se justifica precisamente por ser este acoplamiento una forma de *hiperestatismo local* en las ecuaciones de equilibrio.

El objetivo de este artículo es concluir el desarrollo teórico del modelo hiperviga [13], analizando con mayor detalle la vertiente estática para obtener sistemáticamente las tensiones consistentes con la formulación empleada, así como mostrar, a través de un ejemplo completo, cómo opera la teoría en su totalidad, desde la formulación del modelo hasta la predicción de la respuesta del sólido. La potencia de la formulación para la construcción de las ecuaciones y para la valoración de la influencia de los diferentes parámetros en la respuesta de la pieza alargada queda patente en su aplicación a un problema seleccionado: el problema de flexión alabeada, que representa una formulación de la teoría de vigas capaz de proporcionar una distribución coherente de tensiones tangenciales obtenida en el marco de la propia teoría, sin necesidad de partir de razonamientos basados en condiciones de equilibrio. Se basa en relajar las exigencias de la teoría de Timoshenko, prescindiendo de la planeidad de la sección, mediante un planteamiento similar al que Reddy utiliza en el desarrollo de la teoría de placas [14] o en el desarrollo de un elemento finito de viga de orden superior [15], que se origina en referencias previas de Levinson et al. [16,17] y Bickford [18]. Los resultados obtenidos para las expresiones de las tensiones incorporando la noción de hiperestatismo local y el concepto de pseudoesfuerzo proporcionan una nueva interpretación de las soluciones clásicas que permite diferenciar la fracción de las tensiones debida a los esfuerzos y la debida a los pseudoesfuerzos fruto del hiperestatismo local.

El trabajo se organiza del siguiente modo: en la sección 2 se revisa el concepto de hiperviga y su conexión directa con la idea de hiperestatismo local en el modelo unidimensional (1D); en la sección 3 se introduce la definición de pseudoesfuerzo como término presente en la ecuación de equilibrio que reproduce la acción de las coacciones internas (en el sentido variacional [19]) asociadas a esta indeterminación local; en la sección 4, la introducción de los pseudoesfuerzos motiva la descomposición de las tensiones totales sobre los puntos de la sección en suma de tensiones primarias y tensiones complementarias; estas últimas, exclusivamente debidas al hiperestatismo local, constituyen una distribución autoequilibrada. Con el fin de mostrar cómo opera el modelo en todas sus vertientes, en la sección 5 se desarrolla la aplicación indicada incluyendo las expresiones de las variables asociadas a la formulación y las soluciones correspondientes a 3 casos con diferentes condiciones de contorno. En la sección 6 se exponen las conclusiones del artículo. Por último, en el anexo se incluye la recopilación de resultados de la formulación unificada aplicada a los modelos hiperviga para que el lector interesado pueda seguir el desarrollo del artículo sin necesidad de recurrir a las referencias citadas [9,13].

2. Hiperestatismo local en los modelos hiperviga

El concepto de hiperviga fue introducido por los autores [12,13] al estudiar la naturaleza de las ecuaciones de equilibrio del modelo 1D y concretamente al analizar sus condiciones de desacoplamiento. La hiperviga hace referencia a la *clase de modelos* lineales de piezas alargadas que incluyen desplazamientos generalizados adicionales a los necesarios para describir movimientos de sólido rígido (de pequeña magnitud) de las secciones transversales. Una lectura más profunda del problema proporciona un interesante punto de vista alternativo. Para presentarlo recordamos la forma genérica que adoptan las ecuaciones de equilibrio en un modelo hiperviga (78) [13, ec. 24b]:

$$\mathbf{f}' = \widehat{\mathbf{D}}_{00}\mathbf{u} + \mathbf{H}\mathbf{f} - \mathbf{Q} \tag{1}$$

en la que **f** y **u** son los vectores que agrupan esfuerzos y desplazamientos generalizados, respectivamente; **Q** es el vector de fuerzas generalizadas (cargas exteriores distribuidas consistentes con los desplazamientos generalizados); **H** es la matriz de equilibrio local (72); y $\widehat{\mathbf{D}}_{00}$ es la matriz que determina el acoplamiento entre las variables estáticas y cinemáticas (74). Si la matriz de acoplamiento se anula (como sucede en el modelo de viga estándar, con 3 grados de libertad en desplazamientos y 3 en rotaciones), el equilibrio proporciona un sistema de n ecuaciones diferenciales en las n componentes de los esfuerzos generalizados que son directamente integrables:

$$\mathbf{f}' = \mathbf{H}\mathbf{f} - \mathbf{Q} \tag{2}$$

En este caso, la solución general para los esfuerzos no depende de las características mecánicas del modelo –determinadas por los operadores $\mathbf{D}_{rs}$ definidos mediante las ecuaciones (70)– sino tan solo de las condiciones de equilibrio interno (a través de la matriz **H**). Ambas propiedades (independencia de las características mecánicas y dependencia de las condiciones de equilibrio) se asocian tradicionalmente a los problemas isostáticos, aunque es necesario incidir en que el isostatismo tiene carácter local en este contexto. Los esfuerzos adoptan, entonces, la siguiente expresión:

$$\mathbf{f}(s) = \mathbf{G}(s)\,\mathbf{f}_0 - \mathbf{G}(s)\int_{t=0}^{s} \mathbf{G}^{-1}(t)\,\mathbf{Q}(t)\,dt \tag{3}$$

con

$$\mathbf{G}(s) = \exp\Big(\int_{t=0}^{s} \mathbf{H}(t)\,dt\Big) \tag{4}$$

En el caso en que **H** sea de coeficientes constantes, la expresión se reduce a:

$$\mathbf{f}(s) = \exp(s\,\mathbf{H})\,\mathbf{f}_0 - \int_{t=0}^{s} \exp((s-t)\mathbf{H})\,\mathbf{Q}(t)\,dt \tag{5}$$

Ambas expresiones son independientes de la posible variación de sección transversal. Solo si las condiciones globales de