Rev. int. métodos numér. cálc. diseño ing. 2016;**32(2)**:100–109

Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería

www.elsevier.es/rimni

Elementos finitos mixtos estabilizados para flujos confinados de Bingham y de Herschel-Bulkley. Parte I: Formulación

E. Moreno [a] y M. Cervera [b,*]

[a] Departamento de Ordenación de Cuencas, Ingeniería Forestal, Universidad de los Andes, ULA, Vía Chorros de Milla, 5001, Mérida, Venezuela
[b] Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería (CIMNE), Universidad Politécnica de Cataluña, UPC, Módulo C1, Campus Norte, Jordi Girona 1-3, 08034, Barcelona, España

INFORMACIÓN DEL ARTÍCULO

Historia del artículo:
Recibido el 31 de octubre de 2014
Aceptado el 20 de febrero de 2015
On-line el 31 de agosto de 2015

Palabras clave:
Método de los elementos finitos estabilizados
Subescalas ortogonales OSS
Incompresibilidad
Fluidos viscoplásticos
Modelo de Bingham
Modelo de Herschel-Bulkley

R E S U M E N

En este trabajo se presenta una metodología para la resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes para los fluidos viscoplásticos de Bingham y de Herschel-Bulkley mediante el método de los elementos finitos mixtos estabilizados velocidad/presión. Se desarrolla una formulación teórica y se realiza la implementación computacional.

Los fluidos viscoplásticos se caracterizan por presentar una tensión de corte mínima, denominada tensión de fluencia. Por encima de esta tensión de corte mínima el fluido comienza a moverse. En caso de no superarse esta tensión de fluencia, el fluido se comporta como un cuerpo rígido o cuasirrígido, con velocidad de deformación nula.

Se presentan inicialmente las ecuaciones de Navier-Stokes para un fluido incompresible. Se incluye una revisión de los modelos reológicos viscoplásticos. Se hace una descripción detallada de los mismos. Se describen los modelos viscoplásticos regularizados de Papanastasiou. Se proponen modelos regularizados de doble viscosidad como alternativa a los comúnmente usados.

Se formula el modelo discreto, así como la formulación estabilizada con los métodos de subescalas algebraica (*Algebraic SubGrid Scale* [ASGS]), de subescalas ortogonales (*Orthogonal Subgrid Scale* [OSS]) y de subescalas ortogonales desacopladas (*split*-OSS).

La metodología descrita en este trabajo proporciona la base para el desarrollo de una herramienta computacional para estudiar flujos viscoplásticos confinados, muy comunes en la industria.

Stabilized finite elements for Bingham and Herschel-Bulkley confined flows. Part I: Formulation

Keywords:
Stabilized finite elements
Orthogonal sub-grid scales OSS
Incompressibility
Viscoplastic fluid
Bingham model
Herschel-Bulkley model

A B S T R A C T

This work presents a methodology for the solution of the Navier-Stokes equations for Bingham and Herschel-Bulkley viscoplastic fluids using stabilized mixed velocity/pressure finite elements. The theoretical formulation is developed and implemented in a computer code.

Viscoplastic fluids are characterized by a minimum shear stress called yield stress. Above this yield stress, the fluid is able to flow. Below this yield stress, the fluid behaves as a quasi-rigid body, with zero strain-rate.

* Autor para correspondencia.
Correos electrónicos: elviramoreno25@gmail.com (E. Moreno), mcervera@cimne.upc.edu (M. Cervera).

http://dx.doi.org/10.1016/j.rimni.2015.02.004

First, the Navier-Stokes equations for incompressible fluid are presented. A review of the viscoplastic rheological models is included, with a detailed description of these models. The regularized viscoplastic models due to Papanastasiou are described. Double viscosity regularized models are proposed as an alternative to the models commonly used.

The discrete model is developed, and the Algebraic SubGrid Scale (ASGS) stabilization method, the Orthogonal Subgrid Scale (OSS) method and the split orthogonal subscales method are introduced.

The methodology proposed in this work provides a computational tool to study confined viscoplastic flows, common in industry.

1. Introducción

En el presente trabajo se presenta la formulación continua y su correspondiente versión discreta para modelos de elementos finitos mixtos velocidad/presión de flujos confinados viscoplásticos de Bingham y de Herschel-Bulkley.

Los fluidos viscoplásticos de Bingham y de Herschel-Bulkley son fluidos no-newtonianos que se caracterizan por presentar una tensión de corte mínima, denominada «tensión de fluencia». Por encima de esta tensión de corte mínima el fluido comienza a moverse. En caso de no superar esta tensión de fluencia, el fluido se comporta como un cuerpo rígido o cuasirrígido, con velocidad de deformación nula.

En la industria, los fluidos de Bingham pueden modelar el comportamiento de las pinturas, de los plásticos, de productos alimenticios como la mayonesa y el kétchup, entre otros. Los fluidos de Herschel-Bulkley incluyen, por ejemplo, el comportamiento de las pastas, algunos geles y los fluidos de perforación. En el medio ambiente, estos fluidos pueden modelar flujos de detritos, entre otros.

El movimiento de los fluidos isotérmicos se describe mediante las ecuaciones de conservación de masa y *momentum*, representado por las ecuaciones de Navier-Stokes. Numerosos ensayos experimentales han demostrado que las ecuaciones de Navier-Stokes bajo condiciones isotérmicas describen exactamente el flujo incompresible de los fluidos. Las ecuaciones de Navier-Stokes requieren de una ecuación constitutiva para caracterizar el tipo de fluido. Esta ecuación define el valor de las tensiones en función de la dinámica del flujo y está asociada con la viscosidad del fluido (modelo reológico).

El modelo que dio inicio al estudio de los materiales viscoplásticos fue el modelo plástico de Bingham [1], formulado por Eugene C. Bingham para describir el comportamiento de las pinturas. El modelo de Herschel-Bulkley [2] se considera como un modelo generalizado de Bingham, aunque ha sido menos estudiado que el modelo de Bingham.

Ambos fluidos exhiben una fuerte discontinuidad en su comportamiento reológico debido a la existencia de la tensión de fluencia que es difícil de tratar numéricamente. Para solventar este problema, autores como Bercovier y Engelman [3], Tanner y Milthorpe [4] y Beris et al. [5], entre otros, han propuesto diferentes formulaciones regularizadas. Tanner y Milthorpe fueron los primeros que simularon el problema utilizando un modelo de doble viscosidad aplicable a ambos fluidos. Beris y sus colegas centraron sus estudios en el fluido de Bingham, utilizando el criterio de Von Mises [6] en las zonas de no fluencia y el modelo ideal de Bingham en la zona de fluencia. En 1987, Papanastasiou [7] propuso un modelo regularizado aplicable tanto en las zonas de no fluencia como en las zonas de fluencia para estos 2 fluidos. Souza Mendes y Dutra (SMD) [8] han propuesto recientemente una modificación del modelo de Papanastasiou.

En el presente trabajo se proponen nuevos modelos regularizados para el fluido de Bingham y el fluido de Herschel-Bulkley como alternativa a los modelos regularizados comúnmente usados.

En el caso de los materiales viscoplásticos, el método numérico más utilizado es el método de los elementos finitos (MEF) [7,9–11]. Para abordar el problema de flujo incompresible mediante el MEF, se emplea la formulación mixta de velocidad/presión ($\mathbf{u}$/p). La formulación estándar de Galerkin presenta 2 fuentes de inestabilidades.

La primera es la presencia del término convectivo en las ecuaciones de gobierno que puede resultar en oscilaciones numéricas en el campo de la velocidad. La segunda fuente de inestabilidad es la combinación inapropiada de espacios de interpolación para los campos de velocidad y presión. Esta falta de estabilidad produce oscilaciones numéricas en el campo de las presiones. Para que el problema discreto sea estable, los espacios de interpolación usados para la velocidad y la presión deben satisfacer la condición inf-sup de compatibilidad o condición de Babuška-Brezzi [12]. La formulación de igual interpolación lineal usada en este trabajo no cumple con la condición Babuška-Brezzi [13].

En ambos casos el problema necesita estabilizarse para poder probar convergencia a la solución del problema. Los métodos de estabilización más usados en la actualidad están basados en los métodos de subescalas. Hughes fue el pionero en estos métodos de subescalas (*SubGrid Scale* [SGS]), proponiendo el método de estabilización de subescalas algebraicas (*Algebraic SubGrid Scale stabilization method* [ASGS]) [14] para una ecuación escalar de difusión-reacción. Codina [15] amplió esta aproximación algebraica aplicándola a sistemas escalares multidimensionales.

Posteriormente, Codina [15] propuso adoptar un espacio de subescalas ortogonales al espacio de los elementos finitos, fundamentando así el método de estabilización de subescalas ortogonales (*Orthogonal Subscale Stabilization method* [OSS]). El método OSS se ha aplicado al problema de Stokes, al problema de convección-difusión-reacción y a las ecuaciones de Navier-Stokes, entre otros [15,16]. La estabilización OSS ha sido reformulada en una nueva versión del método llamada estabilización *split*-OSS [17], computacionalmente más ventajosa. Actualmente se usan en problemas muy variados, tanto de mecánica de fluidos [15,17–21] como de mecánica de sólidos [19,22–31].

En la parte I de este trabajo se presenta el problema del flujo confinado con un amplio desarrollo de los modelos constitutivos para flujos viscoplásticos de Bingham y de Herschel-Bulkley, así como los modelos viscoplásticos regularizados propuestos en este trabajo. Finalmente, se presenta el modelo discreto incorporando los modelos de Bingham y de Herschel-Bulkley. Como métodos de estabilización se discuten los métodos ASGS, OSS y *split*-OSS.

2. Modelo continuo para el problema del flujo confinado

El problema continuo de dinámica de fluidos incompresibles e isotérmicos puede resolverse completamente considerando las ecuaciones de Navier-Stokes.