Rev. int. métodos numér. cálc. diseño ing. 2014;**30(4)**:238–246

ELSEVIER DOYMA

Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería

www.elsevier.es/rimni

Formulación de elementos finitos para vigas de sección abierta formadas por laminados compuestos incluyendo las deformaciones tangenciales por cortante y torsión

P.E. Vargas*, E. Oñate y S. Oller

Universitat Politècnica de Catalunya (UPC), C. Gran Capitán s/n, Campus Nord, 08034 Barcelona, España

INFORMACIÓN DEL ARTÍCULO

Historia del artículo:
Recibido el 25 de julio de 2013
Aceptado el 26 de julio de 2013
On-line el 19 de junio de 2014

Palabras clave:
Vigas
Pared delgada
Sección abierta
Compuestos
Flexión
Torsión
Alabeo
Deformaciones tangenciales
Elementos finitos

RESUMEN

En esta investigación se obtiene el campo de desplazamientos y deformaciones para una viga de sección abierta y pared delgada formada por laminados compuestos incluyendo en su cinemática las deformaciones tangenciales por cortante por flexión y torsión. La ecuación de equilibrio del sistema se define a través de una formulación variacional, mostrando que incluir las deformaciones de corte por torsión hace posible formular elementos finitos de clase C_o. Las relaciones tensión-deformación se obtienen en la sección transversal de una viga de sección abierta formada por laminados compuestos extendiendo la teoría de laminados de primer orden - FSDT: *first-order shear deformation*) y usando una «condición de esfuerzos nulos en el contorno». Se formulan 3 elementos finitos unidimensionales *BSW (beam with shear and warping)* con grado de continuidad C_o para el estudio de vigas de sección abierta formadas por laminados compuestos. Mediante el uso de los elementos *BSW* se evalúa la influencia de la estrategia de integración ante el fenómeno de bloqueo por tensiones tangenciales y la velocidad de convergencia para los desplazamientos y giros. Se compara la integración de la matriz de rigidez cuando se aplican técnicas de integración exacta y reducida. Finalmente, se realizan 2 ejemplos donde se estudia el comportamiento a torsión pura y flexotorsión de una viga con sección en C empotrada en un extremo y se comparan los resultados obtenidos con otros de la literatura.

Finite element formulation for thin-walled open composite beams including the effect of flexural and torsional shear deformation

Keywords:
Beams
Thin-walled
Open section
Composite
Flexion
Torsion
Warping
Shear deformation
Finite elements

ABSTRACT

In this paper we derive the field of displacements and strains for thin-walled open composite beams with composite laminated material including in their kinematics flexural and torsional shear deformations effects. The equilibrium equations are defined through the variational formulation and show that is possible to formulate C_o finite elements taking into account the torsional shear deformation. Stress-strain relationships for the cross-section of thin-walled composite beams are obtained by extending first-order laminate (FSDT: first-order shear deformation) theory and using a «free stress resultant condition at the boundary». Three different one-dimensional finite elements with C_o continuity are formulated for the study of thin-walled open composite beams and they are labelled as *BSW* (beam with shear and warping). The influence of the integration strategy in the *BSW* elements is evaluated via the shear-locking phenomenon and the rate of convergence for displacements and rotations. The stiffness matrix integration is compared using exact and reduced integration methods. Examples of pure torsion and flexo-torsion in a cantilever composite beam are performed. Numerical results are compared to those reported by other authors.

* Autor para correspondencia.
Correos electrónicos: vargas@cimne.upc.edu (P.E. Vargas), onate@cimne.upc.edu (E. Oñate), oller@cimne.upc.edu (S. Oller).

0213-1315/$ – see front matter © 2013 CIMNE (Universitat Politècnica de Catalunya). Publicado por Elsevier España, S.L.U. Todos los derechos reservados.
http://dx.doi.org/10.1016/j.rimni.2013.07.007

1. Introducción

El uso de vigas de sección abierta formadas por laminados compuestos experimentó un aumento importante en ingeniería civil, naval y mecánica desde comienzos de la década de 1990 gracias a las propiedades específicas que exhiben: alta relación rigidez/peso y resistencia mecánica/peso, alta resistencia a la degradación ambiental y baja conductividad térmica. Además, por su ligereza, estas vigas son muy adecuadas para estructuras donde el peso constituye una variable fundamental en el proceso de diseño [1–3].

Desde la teoría de Vlasov [4], aplicable a vigas de pared delgada en materiales isótropos, se han realizado numerosas investigaciones, entre las que destacan los estudios realizados por Bauld y Tzeng [5], quienes extendieron la teoría de Vlasov a laminados compuestos, aunque no consideraron las deformaciones transversales en sus análisis; Bank y Bednarczyk [6] y Barbero et al. [7] desarrollaron expresiones simples para el análisis a flexión, torsión y alabeo de vigas en compuestos; Wu y Sun [8] incluyeron en su cinemática las deformaciones tangenciales por flexión y torsión mostrando la utilidad de tenerlas en cuenta durante los análisis; Massa y Barbero [9] consideraron las deformaciones transversales por flexión en sus análisis; Kollar y Pluzsik [10] y Pluzsik y Kollar [11] mostraron la importancia de incluir las deformaciones tangenciales por flexión en los análisis de vigas con alabeo restringido; Lee y Lee [12] desarrollaron un modelo analítico para el estudio de vigas a flexión y torsión que incluye alabeo, pero no consideraron las deformaciones tangenciales, lo que los llevó a utilizar una combinación de elementos lagrangianos y hermíticos en sus análisis. Posteriormente, Lee [13] presentó un modelo general para el estudio de vigas sometidas a flexión incluyendo en su formulación deformaciones tangenciales por flexión y «deformaciones de corte por alabeo», lo que le permitió desarrollar elementos finitos lagrangianos. Sin embargo, Lee utilizó una fórmula para el cálculo del alabeo que solo es aplicable a secciones transversales doblemente simétricas y no contempló la torsión en sus estudios. Kim et al. [14] presentaron soluciones exactas para el estudio a torsión de vigas de sección abierta sin considerar las deformaciones tangenciales dentro de su formulación, lo que les llevó a usar elementos hermíticos de tercer orden en sus análisis. Back y Will [15] extendieron el modelo general de Lee [13] mejorando la fórmula para el cálculo del alabeo haciéndola válida también para secciones con una sola simetría, pero tampoco estudiaron la torsión. Finalmente, Feo y Mancusi [16] sugirieron una aproximación al estudio de vigas en materiales compuestos mediante el uso de elementos finitos hermíticos, contemplaron en su análisis las deformaciones tangenciales por flexión y resolvieron la función de alabeo a través de funciones de aproximación dependientes de la coordenada curvilínea de la línea media de la sección transversal.

En este trabajo se compatibilizan de forma adecuada los campos de deformaciones de los laminados con la sección transversal de viga partiendo de las investigaciones de Lee [13] y Back y Will [15], y extendiendo la hipótesis de « condición de esfuerzos nulos en el contorno » [7,14] a laminados de primer orden - FSDT [17]. Se formulan elementos finitos tipo *BSW* que incluyen las deformaciones tangenciales debidas al cortante por flexión y torsión para el análisis a flexión y torsión de vigas de sección abierta y laminados compuestos. A diferencia de Lee [13] y Back y Will [15], el valor de la función de alabeo se obtiene a través de un algoritmo de búsqueda por grafos [18], generalizando la formulación a cualquier configuración de sección abierta. Los elementos se han formulado para funciones de aproximación lineal *(L-BSW)*, cuadrática *(Q-BSW)* y cúbica *(C-BSW)*, comprobándose la validez de los resultados frente a los obtenidos usando elementos cuadriláteros S9R5 [19].

En este trabajo también se estudia la influencia del método de integración numérica (exacta y reducida) en el bloqueo producido por tensiones tangenciales y sus consecuencias en la convergencia de la solución. Se modeliza una viga en voladizo con sección C y se comparan los resultados obtenidos a flexión y torsión con otros de la literatura [14].

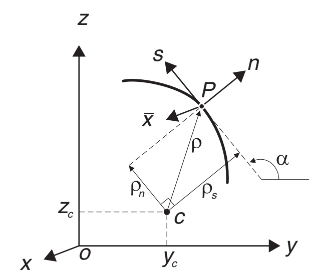

Figura 1. Sistemas de coordenadas en una sección abierta de pared delgada.

2. Teoría general de vigas

2.1. Cinemática

El desarrollo del modelo de viga requiere 2 sistemas ortogonales de coordenadas (fig. 1), el sistema cartesiano (x, y, z) donde el eje x corresponde al eje longitudinal de la viga, y el sistema local $(\bar{x}, n, s)$ para un punto P sobre la línea media de la sección transversal.

En el sistema local el eje $\bar{x}$ es paralelo al eje x, por lo que en adelante se usarán indistintamente. El eje n es normal a la línea media de la sección en el punto P. Los 2 sistemas están relacionados por el ángulo α medido desde el eje y hasta el eje s en el sentido contrario a las agujas del reloj. La distancia entre el punto P y el centro de giro c de la sección transversal se evalúa como la suma de los vectores ρ_n y ρ_s, paralelos a los ejes s y n, respectivamente.

El campo de desplazamientos se obtiene suponiendo que el ángulo de giro por torsión es pequeño, el contorno de la sección transversal no se deforma en su plano, y las líneas rectas normales al eje longitudinal de la viga permanecen rectas antes de la deformación pero no necesariamente normales al eje después. Así, para un punto P con coordenadas (y, z, n) se tiene:

$$\begin{aligned} u &= \quad u_o-(y+n\sin\alpha)\theta_z+(z-n\cos\alpha)\theta_y-(\omega_s-\omega_n)\phi_\omega \\ v &= \quad v_c-[(z-z_c)-n\cos\alpha]\,\theta_x \\ w &= \quad w_c+[(y-y_c)+n\sin\alpha]\,\theta_x \end{aligned} \tag{1}$$

donde u_o, v_c y w_c son los desplazamientos de sólido rígido en los ejes x, y y z, respectivamente; θ_x, θ_y y θ_z son las rotaciones alrededor de los ejes x, y y z; ϕ_ω es la intensidad de alabeo por torsión a la que está sometida la sección; ω_s es la función de alabeo primario definida desde el centro de esfuerzos cortantes c y evaluada sobre la línea media de la sección transversal; y ω_n es la componente de alabeo secundario o alabeo en el espesor.

De acuerdo con Wu y Sun [8], las rotaciones θ_y y θ_z se definen en función de las deformaciones tangenciales debidas a flexión γ_{xz}^o y γ_{xy}^o, la intensidad de alabeo ϕ_ω, en función de la variación en el ángulo de giro por torsión $\partial_x\theta_x$, y las deformaciones tangenciales generadas por la torsión γ_t:

$$\begin{aligned} \theta_y = -\partial_x w_c + \gamma_{xz}^o; \quad \theta_z = \partial_x v_c - \gamma_{xy}^o \\ \phi_\omega = \partial_x\theta_x - \gamma_t \end{aligned} \tag{2}$$

De la expresión (2) se deduce que cuando no hay deformaciones tangenciales por torsión, o estas son despreciables ($\gamma_t \approx 0$), la intensidad del alabeo equivale a la variación del ángulo de torsión por unidad de longitud ($\phi_\omega = \partial_x\theta_x$) y se recupera la teoría de Vlasov [4].