



Cálculo de la función distancia para el método *Level Set* usando la formulación estabilizada *USFEM/Rothe*

C.A. Álvarez H. * y A.L.G.A. Coutinho

Centro de Computación Paralela y Departamento de Ingeniería Civil COPPE/Universidad Federal de Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil

INFORMACIÓN DEL ARTÍCULO

Historia del artículo:

Recibido el 15 de marzo de 2012

Aceptado el 11 de mayo de 2012

On-line el 21 de septiembre de 2013

Palabras clave:

Método de funciones de nivel
Método de Rothe
Formulación estabilizada de elementos finitos

R E S U M E N

En este trabajo se ha utilizado la formulación estabilizada de elementos finitos *Unusual Stabilized Finite Element Method* (USFEM) asociada al método de Rothe para resolver el problema del redistanciamiento en el método de Funciones de Nivel. Se ha utilizado el método de Rothe primero para el avance de la solución en el pseudotiempo y la formulación USFEM para la solución del problema advectivo-reactivo en estado estacionario, para cada paso de tiempo resultante. Se han hecho ejemplos en 2D y se han comparado sus resultados con el esquema de estabilización SUPG, incrementado con un operador de captura de discontinuidades no lineal.

© 2012 CIMNE (Universitat Politècnica de Catalunya). Publicado por Elsevier España, S.L. Todos los derechos reservados.

On computing distance function for *Level Set Method* using *USFEM/Rothe* as stabilized formulation

A B S T R A C T

In this work we use the *Unusual Stabilized Finite Element Method* (USFEM) associated to Rothe's method for solving the redistancing problem in the *Level Set Method*. Rothe's method is used first for advancing the solution in (pseudo)time and USFEM for solving the resulting steady advective–reaction problem in each time step. Several 2D problems are solved and results compared with SUPG scheme supplemented with a nonlinear discontinuity–capturing operator.

© 2012 CIMNE (Universitat Politècnica de Catalunya). Published by Elsevier España, S.L. All rights reserved.

Keywords:

Level sets
Rothe's method
Unusual finite element method

1. Introducción

Los problemas de la hidrodinámica que involucran el fenómeno de flujo en superficie libre suscitan un gran interés en científicos de diversas áreas: oceanografía, ambiental, recursos hídricos, aeroespacial, entre otras. La trayectoria seguida por el agua después de la rotura de una presa, la agitación de un líquido dentro de un tanque o el rompimiento de las olas sobre las estructuras costeras o marítimas son fenómenos que han motivado el surgimiento de muchos métodos numéricos en el intento por describir adecuadamente el movimiento de la interfase entre una parte líquida de mayor densidad (p. ej., agua, petróleo) y una parte gaseosa de menor densidad (p. ej., aire, gas).

En particular, para el flujo en superficie libre se desarrollaron varios métodos numéricos con el propósito de describir el

fenómeno apropiadamente. Dichos métodos pueden agruparse en 2 grandes familias: los que hacen un seguimiento de la interfase (*Interface-Tracking*) y los que capturan la interfase propiamente (*Interface-capturing*) [1–4]. En este trabajo se hace referencia exclusivamente a los últimos.

Los métodos que capturan la interfase emplean una malla fija que abarca los dominios de las fases presentes, no solo la que es de interés de estudio (la fase líquida en la mayoría de las veces) sino también la fase gaseosa. Los métodos denominados Volumen de Fluido (*Volume of Fluid* en inglés, o simplemente VOF) [5–7] y Función de Nivel (*Level Set* en inglés, o simplemente LS) [8–10] son los que se utilizan con más frecuencia. En Xia et al. [11] se puede encontrar una revisión de las aplicaciones de LS en CFD para la industria aeroespacial.

Los métodos LS son técnicas numéricas que se emplean para calcular la posición de frentes que se propagan [2,3]. Se basan principalmente en la advección de una función que determina una curva o superficie, definida en todo el dominio y que abarca las

* Autor para correspondencia: P.O. Box 68506, Rio de Janeiro, RJ 21945, Brasil.

fases de los fluidos involucrados (generalmente 2), cuyo valor de la función es cero en la interfase entre ambos. Una de las principales ventajas de usar LS es su capacidad de tratar eficientemente los cambios de topología y/o discontinuidades presentes en la curva o superficie [8].

La solución de la ecuación de transporte dependiente de un (pseudo)tiempo, que advecta la función de la interfase, se hizo por el esquema de Rothe [12] que establece que primero se realiza la discretización temporal y luego la discretización espacial, empleando alguno de los esquemas de estabilización presentes en la literatura. En este trabajo se empleó la formulación de elementos finitos estabilizados USFEM [13].

El trabajo está dividido en las siguientes secciones: en la sección 2 se presenta la formulación matemática y numérica del problema de captura de interfase usando el método de las funciones de nivel (LS), la descripción de la discretización temporal empleando el método de Rothe, la descripción del esquema estabilizado de elementos finitos USFEM empleado en la discretización espacial, y por último, la descripción de la formulación estabilizada de elementos finitos clásica SUPG [14] con operador de captura de discontinuidades CAU [15]. En la sección 3 se presenta una serie de experimentos numéricos que permitieron demostrar el buen desempeño de la formulación USFEM propuesta, comparando los resultados con el esquema SUPG incrementado con el operador de captura de discontinuidades no lineal CAU. Finalmente, la sección 4 presenta las conclusiones de este trabajo y los futuros retos que deben ser abordados.

2. Formulación matemática y numérica del problema de transporte advectivo

2.1. Formulación del problema

El problema de evolución de la interfase se puede escribir como una ecuación de transporte advectivo dependiente de un (pseudo)tiempo t [16]:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \boldsymbol{\beta} \cdot \nabla \phi = \text{sign}(\phi_0) \quad (1)$$

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \text{sign}(\phi_0) \quad (2)$$

$$\phi(\mathbf{x}, t = 0) = \phi_0(\mathbf{x}, t) \quad (3)$$

Donde $\boldsymbol{\beta}$ es el campo de velocidades conocido, solenoidal ($\nabla \cdot \boldsymbol{\beta} = 0$), que indica la condición de incompresibilidad; ϕ es una función de nivel (o *Level Set*) suave, definida en todo el dominio espacial Ω , que incluye las 2 fases de los fluidos involucrados (líquida y gaseosa) que debe ser determinada para cada instante de tiempo $t \in [0, T]$ y definida así:

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} > 0 & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_l \\ = 0 & \text{si } \mathbf{x} \in \Gamma_l \\ < 0 & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_g \end{cases} \quad (4)$$

\mathbf{x} indica la posición espacial donde la función es evaluada, $\Omega = \Omega_l \cup \Omega_g$, $\Omega_g = \Omega \setminus \Omega_l$, los subíndices l y g se refieren a las fases líquida y gaseosa respectivamente y su interfase es definida como: $\Gamma_l = \{\mathbf{x} | \phi(\mathbf{x}, t) = 0\}$; $\text{sign}(\phi)$ es la función *signo*, dada por:

$$\text{sign}(\phi) = 2(H_\epsilon(\phi) - 1/2) \quad (5)$$

donde $H_\epsilon(\phi)$ es una función tipo *Heaviside*, definida así:

$$H_\epsilon(\phi) = \begin{cases} 0 & \text{si } \phi < -\epsilon \\ \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\phi}{\epsilon} + \frac{1}{\pi} \sin\left(\frac{\pi\phi}{\epsilon}\right) \right] & \text{si } |\phi| \leq \epsilon \\ 1 & \text{si } \phi > \epsilon \end{cases} \quad (6)$$

$\epsilon \in \mathfrak{R}^+$ es un valor pequeño que está directamente relacionado con el espesor de la interfase, que es aproximadamente $2\epsilon/|\phi|$ [4]. La función *Heaviside* se usa para proporcionar una variación suave de la variable ϕ para que cuando $|\phi| \leq \epsilon$ entonces $|\nabla \phi| = 1$ y garantizar un espesor de la interfase igual a 2ϵ , por lo que la selección del valor de ϵ debe estar ajustada al tamaño de los elementos cercanos a la interfase. En este trabajo el valor de ϵ está dado por $\epsilon = \frac{1}{2} \min\{h_e\}$, donde h_e es el tamaño característico del elemento.

2.2. Discretización temporal

El método de Rothe [12] consiste en discretizar primero en el tiempo y luego en el espacio. Discretizamos la ecuación diferencial (1) mediante el método de la regla trapezoidal generalizada en términos de $\phi_n(\mathbf{x})$ y $\dot{\phi}_n(\mathbf{x})$, como se mostró en Henao et al. [17] y se resume a continuación:

$$\dot{\phi}_{n+1} + \boldsymbol{\beta} \cdot \nabla \phi_{n+1} = \text{sign}(\phi_0) \quad (7)$$

$$\phi_{n+1} = \tilde{\phi}_{n+1} + \gamma \Delta t \dot{\phi}_{n+1} \quad (8)$$

$$\tilde{\phi}_{n+1} = \phi_n + (1 - \gamma) \Delta t \dot{\phi}_n \quad (9)$$

Sustituyendo la ecuación (8) en la (7) y reorganizando términos:

$$\dot{\phi}_{n+1} + \boldsymbol{\beta} \cdot \nabla (\tilde{\phi}_{n+1} + \gamma \Delta t \dot{\phi}_{n+1}) = \text{sign}(\phi_0) \quad (10)$$

$$\dot{\phi}_{n+1} + \boldsymbol{\beta} \cdot \nabla \tilde{\phi}_{n+1} + \gamma \Delta t \boldsymbol{\beta} \cdot \nabla \dot{\phi}_{n+1} = \text{sign}(\phi_0) \quad (11)$$

$$\dot{\phi}_{n+1} + \hat{\boldsymbol{\beta}} \cdot \nabla \dot{\phi}_{n+1} = \hat{f}_{n+1} \quad (12)$$

donde

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \gamma \Delta t \boldsymbol{\beta} \quad (13)$$

$$\hat{f}_{n+1} = \text{sign}(\phi_0) - \boldsymbol{\beta} \cdot \nabla \tilde{\phi}_{n+1} \quad (14)$$

En la ecuación (2) el campo de velocidades, dado por el vector $\boldsymbol{\beta}$, depende del gradiente de la solución transformando la ecuación (1) en una ecuación no lineal. Si usamos pequeños pasos de tiempo en el esquema de avance en el tiempo, podemos transformar la ecuación (1) en una ecuación pseudo-lineal, «linealizando» dicha ecuación al usar el valor de la solución del paso de tiempo inmediatamente anterior; esto se logra tomando los valores en \hat{f}_n .

2.3. Discretización espacial

La ecuación (12) puede interpretarse como una ecuación de convección-reacción en estado estacionario para la variable $\dot{\phi}$. Reescribiendo:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} \cdot \nabla \dot{\phi}_{n+1} - \hat{\sigma} \dot{\phi}_{n+1} = \hat{f}_n \quad (15)$$

donde el parámetro $\hat{\sigma} = -1$.

Hay que hacer énfasis en esta idea, ya que realmente no existe como tal un parámetro de reacción dentro de la ecuación sino que, al desarrollarse algebraicamente el esquema de Rothe, el término dependiente del tiempo se asemeja al término reactivo. Por lo tanto, el valor $\hat{\sigma} = -1$ no significa que haya absorción o disipación.

Ahora podemos reescribir el método de Galerkin en su forma débil:

$$\hat{a}(\omega^h, \dot{\phi}_{n+1}^h) = (\omega^h, \hat{f}(t_n)) \quad (16)$$

Download English Version:

<https://daneshyari.com/en/article/1702645>

Download Persian Version:

<https://daneshyari.com/article/1702645>

[Daneshyari.com](https://daneshyari.com)