

Deux extensions de Théorèmes de Hamburger (portant sur l'équation fonctionnelle de la fonction zêta)

Jean-François Burnol¹

Université Lille 1, UFR de Mathématiques, Cité Scientifique M2, F-59655 Villeneuve d'Ascq, France

Received 24 June 2011; received in revised form 6 January 2012

Abstract

We propose two types of extensions to Hamburger's theorems on the Dirichlet series with a functional equation like the one of the Riemann zeta function, under weaker hypotheses. This builds upon the dictionary between the moderate meromorphic functions with the functional equation and the tempered distributions with an extended S -support condition.

© 2012 Elsevier GmbH. All rights reserved.

Résumé

Nous proposons deux types d'extensions aux théorèmes de Hamburger sur les séries de Dirichlet avec équation fonctionnelle comme celle de la fonction zêta de Riemann, sous des hypothèses plus faibles. Ceci repose sur le dictionnaire entre les fonctions méromorphes modérées avec cette équation fonctionnelle et les distributions tempérées avec la condition de support S -étendue.

© 2012 Elsevier GmbH. All rights reserved.

MSC 2010: 11M06; 11F66

Keywords: Riemann zeta function; Dirichlet series; Hamburger theorem; Functional equations; co-Poisson formula; Poisson formula

E-mail address: burnol@math.univ-lille1.fr.

¹ L'auteur remercie le C.R.M. de Barcelone pour l'hospitalité de son accueil en mai 2011, lors d'un séjour pendant lequel ce travail a été conçu et rédigé.

1. Introduction et présentation des résultats

Le Théorème de Hamburger [7] dit à peu près que deux fonctions $f(s)$ et $g(s)$, méromorphes dans le plan complexe, qui admettent chacune pour $\operatorname{Re}(s) \gg 1$ une représentation sous forme de série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$, et sont reliées par l'équation fonctionnelle

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) g(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) f(1-s),$$

sont alors nécessairement égales à un multiple de la fonction zêta de Riemann $\zeta(s)$. Ce résultat fameux illustre une certaine rigidité de l'équation fonctionnelle de la fonction zêta. Notre but ici est, en utilisant quelques notions communes de la théorie des distributions, de le reprouver sous des hypothèses nettement plus faibles que celles d'origine. En particulier nous n'aurons pas besoin de demander à g d'admettre une représentation en série de Dirichlet, mais seulement de tendre rapidement vers une limite lorsque $\operatorname{Re}(s) \rightarrow \infty$. Et lorsque l'on supposera seulement g bornée dans un demi-plan alors f sera nécessairement une combinaison linéaire finie de $\zeta(s)$, $\zeta(s+2)$, $\zeta(s+4)$, ...

L'article se veut accessible à tout lecteur disposant du bagage usuel de base de la théorie des distributions: il faut y ajouter quelques éléments qui ont été développés dans le chapitre IV de [2], chapitre qui peut être lu avec les mêmes pré-requis: il y est construit une notion de «fonction méromorphe modérée avec équation fonctionnelle» dont nous rappellerons les principaux éléments.

Il est plus commode pour cet article de mettre l'équation fonctionnelle de la fonction zêta sous la forme $\zeta(s) = \chi(s)\zeta(1-s)$ avec

$$\chi(s) = \frac{\pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}$$

La fonction méromorphe $\chi(s)$ est à croissance au plus polynomiale dans toute bande verticale de largeur finie. Voici tout d'abord l'énoncé originel démontré par Hamburger:

Théorème (Hamburger, [7]). *Soit f une fonction méromorphe dans le plan complexe tout entier, et d'ordre fini (f est $\mathcal{O}(e^{|s|^k})$ avec un certain entier k pour $|s| \rightarrow \infty$, en particulier ne possède au plus qu'un nombre fini de pôles). Si $f(s)$ est représentée pour $\operatorname{Re}(s) > 1$ par une série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ absolument convergente, et si la fonction méromorphe*

$$g(s) = \chi(s)f(1-s)$$

admet elle aussi, pour $\operatorname{Re}(s) \gg 1$, une représentation sous la forme d'une série de Dirichlet convergente $\sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{-s}$, alors f est un multiple de la fonction zêta. En particulier si $f(s)$ est représentée pour $\operatorname{Re}(s) > 1$ par une série de Dirichlet absolument convergente $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ et vérifie l'équation fonctionnelle

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) f(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) f(1-s),$$

alors elle est un multiple de la fonction zêta de Riemann.

Download English Version:

<https://daneshyari.com/en/article/4582437>

Download Persian Version:

<https://daneshyari.com/article/4582437>

[Daneshyari.com](https://daneshyari.com)