Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
Expo. Math. 27 (2009) 79–86
EXPOSITIONES MATHEMATICAE
www.elsevier.de/exmath

Nouvelles expressions des formules de Hasse et de Hermite pour la fonction Zêta d'Hurwitz

Marc-Antoine Coppo

CNRS - Université de Nice-Sophia Antipolis, Laboratoire J.A. Dieudonné, Parc Valrose, F-06108 Nice Cedex 2, France

Received 4 February 2008; received in revised form 15 April 2008

Abstract

This article presents an interesting relation between the Hurwitz zeta function $\zeta(s, x)$ and a modification of the Bell polynomials through the rewriting of two classical identities discovered by Hasse and Hermite, respectively. Some applications of these new expressions to Euler's sums are also underscored.

MSC 2000: primary 11M35; secondary 40-02;40-03

1. Introduction

La fonction zêta d'Hurwitz (cf. [1, 1.3.1]) est définie pour $\Re(s) > 1$ et $x > 0$ par la série:

$$\zeta(s, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^s}.$$

Introduite en 1882 par Hurwitz,[1] cette fonction a fait l'objet au cours des decennies qui ont suivi (et jusqu'aux années 1930) de travaux devenus classiques de Lerch, Mellin,

E-mail address: Marc-Antoine.Coppo@unice.fr.

[1] *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, t. XXVII.

doi:10.1016/j.exmath.2008.04.004

Hermite et Hasse. En sommant pour $n \geqslant 0$ l'expression:

$$\frac{\Gamma(s)}{(n+x)^s} = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(n+x)t} t^{s-1}\, \mathrm{d}t$$

on obtient la représentation intégrale:

$$\zeta(s,x) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt} t^{s-1}}{1-\mathrm{e}^{-t}}\, \mathrm{d}t \tag{1}$$

qui fait apparaitre $\zeta(s,x)$ comme une transformée de Laplace (en x) et comme une transformée de Mellin (en s).

L'apparition des polynômes de Bell (cf. [7, chapitre 5]) remonte quant à elle au milieu du 19ème siècle avec les travaux de Faà de Bruno (cf. [5] pour une approche historique). Dans ce travail, nous considérerons une forme modifiée de ces polynômes, définis par la fonction génératrice:

$$\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n \frac{t^n}{n}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x_1,\ldots,x_n) t^n. \tag{2}$$

Les premiers polynômes de Bell modifiés sont les suivants:

$$P_0 = 1\, P_1(x_1) = x_1;\; P_2(x_1,x_2) = \tfrac{1}{2}(x_1^2 + x_2);$$

$$P_3(x_1,x_2,x_3) = \tfrac{1}{6}(x_1^3 + 3x_1x_2 + 2x_3) \text{ etc.}$$

Il y a une dizaine d'années, on s'est aperçu que ces polynômes intervenaient en Physique mathématique où ils permettent de donner une représentation explicite des équations de Korteweg de Vries et de Kadomtsev-Petvisashvili (cf. la proposition 8 dans [8]).

L'objet de cet article est d'établir une intéressante connexion entre la fonction $\zeta(s,x)$ et les polynômes $P_n(x_1,\ldots,x_n)$ au travers de la reformulation de deux identités classiques, respectivement dues à Hasse (cf. [3, p. 461]) et Hermite (cf. [4, p. 540]):

Théorème 1. *Soit $P_n(x_1,\ldots,x_n)$ le n-ème polynôme de Bell modifié défini par* (2). *Soit $h_m(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{(i+x)^m}$. Soit $\lambda_{n+1} = \int_0^1 x(1-x)\cdots(n-x)\,\mathrm{d}x$. Pour tout entier $s>1$ et tout réel $x>0$, on a*:

$$(s-1)\zeta(s,x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(n+1)x(x+1)\cdots(x+n)} P_{s-2}(h_1(x),\ldots,h_{s-2}(x)) \tag{3}$$

et

$$\zeta(s,x) - \frac{1}{(s-1)\,x^{s-1}} = \frac{1}{2x^s} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{n+1}}{(n+1)x(x+1)\cdots(x+n)} \times P_{s-1}(h_1(x),\ldots,h_{s-1}(x)). \tag{4}$$