



Existence en temps grand pour des équations de Klein–Gordon à petite donnée initiale sur une structure de Toeplitz

Rafik Imekraz

*Université de Cergy-Pontoise, Laboratoire de Mathématiques AGM, 2, avenue Adolphe Chauvin,
95302 Cergy-Pontoise Cedex, France*

Reçu le 30 mars 2012 ; accepté le 14 janvier 2013

Disponible sur Internet le 23 janvier 2013

Communiqué par J. Bourgain

Résumé

Pour des non-linéarités qui rendent hamiltonienne l'équation de Klein–Gordon, nous obtenons un temps d'existence de l'ordre de $C(r)\varepsilon^{-r}$, pour tout $r \geq 3$, lorsque la condition initiale est de norme $\varepsilon \ll 1$ dans un espace de Sobolev de grand indice. Les variétés étudiées sont munies de structures de Toeplitz au sens de Boutet de Monvel et Guillemin, nous ferons une hypothèse de nature géométrique sur la périodicité du flot hamiltonien des opérateurs pseudo-différentiels de Toeplitz sous-jacents, cela permettra d'avoir une localisation spectrale utile dans notre démarche. La méthode employée suit les travaux de Delort et Szeftel et de Bambusi, Delort, Grebert et Szeftel sur les sphères et les variétés de Zoll et consiste à effectuer des formes normales de Birkhoff à tout ordre. Le cadre des structures de Toeplitz nous permet de couvrir tous les cas précédemment étudiés (cercle, sphères et variétés de Zoll) mais aussi de nouvelles non-linéarités qui font intervenir des projecteurs de Szegő.

© 2013 Elsevier Inc. Tous droits réservés.

Abstract

We prove a long time existence, of order $C(r)\varepsilon^{-r}$ for all $r \geq 3$, for small solutions, of order $\varepsilon \ll 1$, in high Sobolev norms of Klein–Gordon equation with Hamiltonian nonlinearities. Manifolds studied are endowed with Toeplitz structures in the sense of Boutet de Monvel and Guillemin. We also make a geometric assumption about periodicity of the Toeplitz pseudo-differential operator Hamiltonian flow. This ensures a useful spectral localization. Our approach follows Delort and Szeftel's and Bambusi, Delort, Grebert and Szeftel's works on the spheres and Zoll manifolds and uses Birkhoff normal forms at any order. The context

Adresse e-mail : rafik.imekraz@u-bordeaux1.fr.

of Toeplitz structures allows us to generalize all the previous cases (torus, spheres and Zoll manifolds) and to deal with new linearities involving Szegő projectors.

© 2013 Elsevier Inc. Tous droits réservés.

Keywords: Zoll manifold; Toeplitz structure; Klein–Gordon; Normal form; Nonlinear; Hamiltonian

Table des matières

1.	Introduction	1481
1.1.	Enoncé des résultats	1481
1.2.	Exemples	1483
1.3.	Contexte du théorème	1485
2.	Analyse spectrale	1487
2.1.	Introduction des opérateurs pseudo-différentiels de Toeplitz	1487
2.2.	Contrôle des intégrales-produits des modes propres	1491
2.3.	Propriété de Delort–Szeftel	1493
3.	Mise sous forme normale	1494
3.1.	Formalisme hamiltonien	1494
3.2.	Modèle abstrait	1497
3.3.	Conclusion à partir de la mise en forme normale	1499
4.	Démonstration du théorème principal	1503
4.1.	Inversion des petits diviseurs	1503
4.2.	Résolution de l'équation homologique	1511
4.3.	Considérations sur les crochets de Poisson	1516
4.4.	Démonstration du théorème 3.2.10 de forme normale	1518
4.5.	Annexe : régularité des formes multilinéaires	1520
	Références	1523

1. Introduction

1.1. Enoncé des résultats

Soit X une variété compacte, on la munit d'une mesure Lebesgienne dx , on considère un sous-cône symplectique fermé Σ de $T^*X \setminus \{0\}$, c'est-à-dire de T^*X privé de sa section nulle, autrement dit

- si $(x, \xi^*) \in \Sigma$ alors $(x, t\xi^*) \in \Sigma$ pour tout $t > 0$,
- la forme symplectique canonique de $T^*X \setminus \{0\}$ induit une forme symplectique sur Σ .

Nous noterons $\pi : L^2(X, \mathbb{C}) \rightarrow L^2(X, \mathbb{C})$ un projecteur orthogonal de Szegő associé à Σ au sens de Boutet de Monvel et Guillemin [10, paragraphe 2], nous rappellerons les définitions précises à la partie 2.1 mais signalons d'ores et déjà les deux exemples les plus simples :

- (i) pour X quelconque et $\Sigma = T^*X \setminus \{0\}$, le choix $\pi = \text{Id}$ convient,

Download English Version:

<https://daneshyari.com/en/article/4590808>

Download Persian Version:

<https://daneshyari.com/article/4590808>

[Daneshyari.com](https://daneshyari.com)