Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
Journal of Functional Analysis 238 (2006) 278–297
JOURNAL OF Functional Analysis
www.elsevier.com/locate/jfa

Comportement des noyaux de la chaleur des opérateurs de Schrödinger et applications à certaines équations paraboliques semi-linéaires

El Maati Ouhabaz

Institut de Mathématiques de Bordeaux, Laboratoire d'Analyse et Géométrie, UMR 5467, Université Bordeaux 1, 351, Cours de la Libération, 33405 Talence, France

Reçu le 4 juillet 2005 ; accepté le 16 mai 2006

Disponible sur Internet le 16 juin 2006

Communiqué par L. Gross

Abstract

We consider general Schrödinger operators on domains of Riemannian manifolds with possibly exponential volume growth. We prove sharp large time Gaussian upper bounds. These bounds are then used to prove new L^p–L^p estimates for the corresponding semigroups. Applications to semi-linear parabolic equations are given.

Mots-clés : Noyaux de la chaleur ; Estimations Gaussiennes ; Variétés Riemanniennes ; Opérateurs de Schrödinger ; Équations de la chaleur

1. Introduction

Le but de ce travail est de montrer des estimations fines des noyaux de la chaleur d'opérateurs de Schrödinger agissant sur des domaines de variétés Riemanniennes assez générales. Ces estimations sont ensuite utilisées pour obtenir de nouvelles estimations de la norme L^p des semi-groupes correspondants. Celles-ci serviront à établir des résultats d'existence de solutions positives globales pour certaines équations de la chaleur semi-linéaires.

Nous commençons par préciser les hypothèses et notations.

Adresse e-mail : elmaati.ouhabaz@math.u-bordeaux1.fr.

0022-1236/$ – see front matter
doi:10.1016/j.jfa.2006.05.009

Soit M une variété Riemannienne complète (non nécessairement compacte). On notera dx et ρ l'élément de volume et la distance Riemanniennes, respectivement. Par $B(x,r)$ nous designons la boule ouverte de centre x et de rayon r. Le volume de $B(x,r)$ sera noté $v(x,r)$.

Nous allons supposer que $v(x,r)$ vérifie la propriété suivante : il existe des constantes $\delta_0 \geqslant 0$, C et $d \geqslant 0$ telles que

$$v(x,r) \leqslant C e^{\delta_0 r} \left(\frac{r}{s}\right)^d v(x,s) \quad \text{pour tout } x \in M,\ 0 < s \leqslant r < \infty. \tag{1}$$

Dans le cas particulier où $\delta_0 = 0$, (1) n'est autre que la propriété du doublement du volume :

$$v(x,\lambda r) \leqslant C\lambda^d v(x,r) \quad \text{pour tout } x \in M,\ r > 0 \text{ et } \lambda \geqslant 1. \tag{2}$$

Il est facile de voir que cette dernière propriété provient de :

$$v(x,2r) \leqslant C v(x,r) \quad \text{pour tout } x \in M \text{ et tout } r > 0, \tag{3}$$

où C est une constante positive.

La propriété (1) est satisfaite pour une grande classe de variétés. Par exemple, elle a lieu pour les variétés dont la courbure de Ricci est minorée (par une constante négative).

Soit Ω un ouvert quelconque de la variété M. Nous désignons par Δ_Ω l'opérateur de Laplace–Beltrami soumis au conditions au bord de Dirichlet. C'est (moins) l'opérateur associé à la forme quadratique

$$\mathfrak{a}(u,u) = \int_\Omega \left|du(x)\right|^2 dx \quad \text{avec } D(\mathfrak{a}) = H_0^1(\Omega). \tag{4}$$

Ici $H_0^1(\Omega)$ désigne l'adhérence dans l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ de l'espace $C_c^\infty(\Omega)$ des fonctions indéfiniment différentiables et à support compact dans Ω. Soit $V : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable et localement intégrable sur Ω. Si $V = V^+ \geqslant 0$, on peut définir l'opérateur de Schrödinger $-\Delta_\Omega + V^+$ comme l'opérateur associé à la forme

$$\mathfrak{b}(u,u) = \int_\Omega \left|du(x)\right|^2 dx + \int_\Omega V^+|u|^2 dx,$$

avec domaine

$$D(\mathfrak{b}) = \left\{u \in H_0^1(\Omega),\ \int_\Omega V^+|u|^2 dx < \infty\right\}.$$

Si V n'est pas positif sur Ω, l'opérateur $-\Delta_\Omega + V$ peut être défini (encore par la méthode variationnelle) sous certaines conditions sur la partie négative V^- de V. C'est le cas si V^- vérifie :

$$\int_\Omega V^-|u|^2 dx \leqslant \alpha\mathfrak{b}(u,u) + \beta\int_\Omega |u|^2 dx \quad \text{pour tout } u \in D(\mathfrak{b}), \tag{5}$$

où α et β sont des constantes positives avec $\alpha < 1$.