Journal of Number Theory 146 (2015) 627–632

Contents lists available at SciVerse ScienceDirect

Journal of Number Theory

www.elsevier.com/locate/jnt

Une remarque sur les intégrales orbitales de la fonction caractéristique d'un réseau hyperspécial de $\mathfrak{gl}(n)$

J.-L. Waldspurger

Institut de Mathématiques de Jussieu, CNRS, 2 place Jussieu, 75005 Paris, France

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 14 mai 2013
Accepté le 4 juin 2013
Disponible sur Internet le 6 août 2013
Communiqué par James Cogdell, Hervé Jacquet, Dihua Jiang et Steve Kudla

Keywords:
Orbital integrals
Fourier transform

ABSTRACT

Let F be a non-archimedean field, let $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, F)$ and let $\mathfrak{k}$ be the lattice of matrices whose coefficients are integers. Consider a function f on $\mathfrak{g}$ whose orbital integrals are supported on elements with integral eigenvalues and such that the Fourier transform of f has the same property. Then the orbital integrals of f are equal to the orbital integrals of the characteristic function of $\mathfrak{k}$, up to a constant.

1. Introduction

Soient F un corps local non-archimédien et n un entier supérieur ou égal à 1. On note p la caractéristique et $\mathfrak{o}_F$ l'anneau des entiers de F. On suppose $p > n$. On pose $G = GL(n)$ que l'on considère comme un groupe algébrique sur F, ou même comme un schéma en groupes sur $\mathfrak{o}_F$. Notons $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G et posons $\mathfrak{k} = \mathfrak{g}(\mathfrak{o}_F)$. Autrement dit, $\mathfrak{k}$ est l'algèbre des matrices $n \times n$ à coefficients dans $\mathfrak{o}_F$. Notons $C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ l'espace des fonctions sur $\mathfrak{g}(F)$, à valeurs complexes, qui sont localement constantes et à support compact. Fixons un caractère continu ψ_F de F de conducteur $\mathfrak{o}_F$. Introduisons la transformation de Fourier $f \mapsto \hat{f}$ dans $C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ définie par

Adresse e-mail : waldspur@math.jussieu.fr.

0022-314X/$ – see front matter
http://dx.doi.org/10.1016/j.jnt.2013.06.001

$$\hat{f}(X) = \int_{\mathfrak{g}(F)} f(Y)\psi_F\big(trace(XY)\big)\,dY,$$

où la mesure est normalisée de sorte que $\mathfrak{k}$ soit de mesure 1. A tout $X \in \mathfrak{g}(F)$ est associée une intégrale orbitale. C'est la forme linéaire sur $C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ définie par

$$O(X, f) = \int_{G_X(F)\backslash G(F)} f\big(g^{-1}Xg\big)\,dg.$$

On a noté G_X la composante neutre du centralisateur de X dans G. Pour définir l'intégrale ci-dessus, on doit bien sûr fixer une mesure invariante par translations à droite, mais ce choix ne nous importe pas. On note $I(\mathfrak{g}(F))$ le quotient de $C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ par le sous-espace des f telles que $O(X, f) = 0$ pour tout X. Rappelons que, d'après Harish-Chandra, les intégrales orbitales de la transformée de Fourier d'une fonction $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ sont déterminées par celles de la fonction f elle-même. Autrement dit, la transformation de Fourier se quotiente en une bijection de $I(\mathfrak{g}(F))$ dans lui-même. Notons $\mathbf{1}_{\mathfrak{k}}$ la fonction caractéristique de $\mathfrak{k}$ et posons $\mathfrak{k}^G = \{g^{-1}Xg;\ g \in G(F),\ X \in \mathfrak{k}\}$. On a l'égalité $\hat{\mathbf{1}}_{\mathfrak{k}} = \mathbf{1}_{\mathfrak{k}}$ et la propriété évidente :

$$O(X, \mathbf{1}_{\mathfrak{k}}) = 0 \quad \text{et} \quad O(X, \hat{\mathbf{1}}_{\mathfrak{k}}) = 0 \quad \text{pour tout } X \in \mathfrak{g}(F) \text{ tel que } X \notin \mathfrak{k}^G.$$

Inversement, soit $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ vérifiant la même propriété, c'est-à-dire vérifiant

(1) $O(X, f) = 0$ et $O(X, \hat{f}) = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{g}(F)$ tel que $X \notin \mathfrak{k}^G$.

La question que l'on se pose est : l'image de f dans $I(\mathfrak{g}(F))$ est-elle proportionnelle à celle de $\mathbf{1}_{\mathfrak{k}}$? Autrement dit, existe-t-il $c \in \mathbb{C}$ tel que $O(X, f) = cO(X, \mathbf{1}_{\mathfrak{k}})$ pour tout X ? Le but de cet article est d'y donner une réponse positive, c'est-à-dire de prouver la proposition suivante.

Proposition. *On suppose $p > n$. Soit $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ vérifiant* (1). *Alors l'image de f dans $I(\mathfrak{g}(F))$ est proportionnelle à celle de $\mathbf{1}_{\mathfrak{k}}$.*

C'est H. Jacquet qui m'a posé cette question. Je le remercie pour ses commentaires judicieux sur une première mouture de ce texte.

2. Une matrice triangulaire

On note $\mathbb{F}_q$ le corps résiduel de $\mathfrak{o}_F$, val_F la valuation usuelle de F et on fixe une uniformisante ϖ. On note $\mathcal{P}(n)$ l'ensemble des partitions $\underline{n} = (n_1 \geqslant n_2 \geqslant \cdots \geqslant n_r > 0)$ de n. Ainsi qu'il est usuel, on s'autorise à augmenter la longueur de $\underline{n}$ en ajoutant des termes nuls, autrement dit à poser $n_i = 0$ pour un entier $i > r$. Ainsi, pour tout entier $k \geqslant 1$, on peut définir $S_k(\underline{n}) = \sum_{i=1,\ldots,k} n_i$. On définit classiquement un ordre sur