J. Math. Pures Appl. 103 (2015) 429–471

Contents lists available at ScienceDirect

Journal de Mathématiques Pures et Appliquées

www.elsevier.com/locate/matpur

Spectre du laplacien singulier associé aux métriques canoniques sur $\mathbb{P}^1$ et la théorie des séries de Fourier–Bessel généralisée

Mounir Hajli

National Center for Theoretical Sciences (Taipei Office), National Taiwan University, Astro-Math Building, No. 1, Sec. 4, Roosevelt Road, Taipei 10617, Taiwan

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 20 juillet 2013
Disponible sur Internet le 26 avril 2014

MSC :
35P10
35J05
14G40

Mots-clés :
Singular hermitian metric
Arakelov geometry
Spectral theory
Fourier–Bessel series

RÉSUMÉ

On construit un opérateur différentiel associé à une classe de métriques singulières sur les fibrés en droites sur $\mathbb{P}^1$. Cet opérateur étend la notion du laplacien classique. On établit qu'il admet un spectre positif, discret et infini, qu'on calcule explicitement. Ce calcul sera une application d'une théorie des séries de Fourier–Bessel généralisée développée dans cet article.

ABSTRACT

We construct a differential operator associated to a class of singular metrics over lines bundles on $\mathbb{P}^1$. This operator extends the classical notion of Laplacian. We establish that this operator admits a positive, discrete and infinite spectrum, that with compute explicitly. This computation is an application of a generalized theory of Fourier–Bessel series developed in this article.

1. Introduction

Soit X une variété kählérienne compacte munie une forme de Kähler ω_X de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $\overline{E} = (E, h_E)$ un fibré vectoriel holomorphe muni de h_E, une métrique hermitienne de classe $\mathcal{C}^\infty$. À cette donnée on attache un opérateur différentiel $\Delta^q_{\overline{E}}$ appelé l'opérateur Laplacien agissant sur l'espace des $(0, q)$-formes différentielles de classe $\mathcal{C}^\infty$ à coefficients dans E pour $q = 0, 1, \ldots, n$. Alors, il est bien connu que cet opérateur admet un spectre positif, infini et discret.

Le calcul explicite du spectre est un probème intéressant. Il y a peu de cas pour les quels on sait calculer explicitement le spectre de $\Delta^*_{\overline{E}}$.

Lorsque $X = \mathbb{P}^n$ est muni de la métrique de Fubini–Study et $\overline{E}$ est le fibré en droites hermitien trivial, Ikeda et Taniguchi calculent explicitement le spectre du laplacien $\Delta^q_{\overline{E}}$, voir [9, Théorème 5.2]. Ces calculs

Adresses e-mail : hajlimounir@gmail.com, hajli@math.jussieu.fr.

http://dx.doi.org/10.1016/j.matpur.2014.04.010
0021-7824/

ont été utilisés par Gillet et Soulé afin de calculer explicitement la torsion analytique holomorphe correspondante et par suite établir un théorème de Riemann–Roch arithmétique, voir [5, Théorème 2.1.1 et §2.3.2]. L'idée d'Ikeda et Taniguchi consiste à utiliser la compatibilité de la structure de $\mathbb{P}^n$, vu comme variété homogène, avec la métrique de Fubini–Study et d'appliquer ensuite la théorie des représentations. Plus concrètement, si $X = G/K$ est une variété riemannienne homogène telle que G agit transitivement sur X, et g une métrique riemannienne G-invariante sur X. Alors, Δ le laplacien associé est G-invariant, et donc ses espaces propres sont des G-modules. D'après Ikeda et Taniguchi, le calcul du spectre de Δ se ramène donc à un problème de la théorie des representations.

1.1. Motivation

Dans ce texte, nous nous intéressons à une classe de métriques singulières sur les fibrés en droites sur $\mathbb{P}^1$, l'espace projectif complexe de dimension 1, appelées les métriques canoniques. Ce sont des métriques continues mais pas $\mathcal{C}^\infty$ en général, déterminées uniquement par la structure combinatoire de $\mathbb{P}^1$, vue comme variété torique. Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, la métrique canonique sur $\mathcal{O}(m)$ est donnée comme suit :

$$h_{\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty}(s,s)(x) = \frac{|s(x)|^2}{\max(|x_0|,|x_1|)^{2m}}, \tag{1}$$

où $x = [x_0 : x_1] \in \mathbb{P}^1$ et s est une section locale holomorphe de $\mathcal{O}(m)$ autour de x. Comme $T\mathbb{P}^1 \simeq \mathcal{O}(2)$, alors on peut munir $\mathbb{P}^1$ de la forme de Kähler singulière suivante :

$$\omega_\infty := \frac{i}{2\pi}\frac{dz\wedge d\bar{z}}{\max(1,|z|)^4},$$

et on note par $h_{\overline{T\mathbb{P}^1}_\infty}$ la métrique sur $T\mathbb{P}^1$ correspondante.

A priori, il n'est pas clair si la théorie classique du laplacien peut être étendue à ce genre de métriques.

Le but de cet article est double : Nous montrons qu'on peut associer aux métriques canoniques sur $\mathbb{P}^1$ une théorie d'opérateurs singuliers généralisant formellement la théorie classique du laplacien, et nous établissons ensuite que ces opérateurs possédent des propriétés analogues au cas classique.

Plus concrètement, nous montrons qu'on peut associer à ω_∞ et à $h_{\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty}$ un opérateur laplacien singulier que nous noterons par $\Delta_{\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty}$ qui étend la notion classique du laplacien. Nous établissons qu'il possède un spectre, noté $\mathrm{Spec}(\Delta_{\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty})$, que nous calculons explicitement. On notera, comme dans le cas classique, que $\mathrm{Spec}(\Delta_{\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty})$ est discret, infini et positif.

Remarque 1.1. Nous utiliserons ces calculs afin de définir une fonction Zêta associée à $\Delta_{\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty}$ et à son étude (voir [7]), aussi pour définir une torsion analytique holomorphe canonique associée aux métriques canoniques, avec applications à la géométrie d'Arakelov (voir [8]).

1.2. Résultats et organisation de l'article

Soit $(\cdot,\cdot)_{L^2,\infty}$ le produit hermitien sur $A^{0,0}(\mathbb{P}^1,\mathcal{O}(m))$ associé à ω_∞ et à $h_{\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty}$ (voir Section 3). On note par $\mathcal{H}^{(m)}$ la complétion de cet espace par $(\cdot,\cdot)_{L^2,\infty}$. Comme les métriques sont singulières alors la construction classique du laplacien (voir rappel Section 2) n'est plus valable ici.

Malgré cela, nous construisons (voir Section 3) un opérateur différentiel singulier $\Delta_{\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty}$, en associant à tout élément de $A^{0,0}(\mathbb{P}^1,\mathcal{O}(m))$ de la forme $f\otimes z^k$, l'élément $\Delta_{\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty}(f\otimes z^k)$ défini sur $\mathbb{P}^1\setminus\mathbb{S}^1$ comme suit :

$$\Delta_{\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty}(f\otimes z^k) = -h_{\overline{T\mathbb{P}^1}_\infty}\left(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z}\right)^{-1} h_{\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty}(z^k,z^k)^{-1}\frac{\partial}{\partial z}\left(h_{\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty}(z^k,z^k)\frac{\partial f}{\partial\bar{z}}\right)\otimes z^k.$$