Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.,
4^e série, t. 40, 2007, p. 951 à 983.

BORNE SUR LA TORSION DANS LES VARIÉTÉS ABÉLIENNES DE TYPE CM

PAR NICOLAS RATAZZI

RÉSUMÉ. – Soit A une variété abélienne de dimension $g \geqslant 1$ définie sur un corps de nombres K. On étudie la taille du groupe de torsion $A(F)_{\mathrm{tors}}$ où F/K est une extension finie, et on étudie plus précisément le meilleur exposant possible γ dans l'inégalité $\mathrm{Card}(A(F)_{\mathrm{tors}}) \ll [F:K]^{\gamma}$ quand F parcourt les extensions finies de K. Dans le cas CM, nous donnons une formule exacte pour l'exposant γ en fonction des caractères du groupe de Mumford–Tate—un tore dans ce cas—et nous donnons une brève discussion dans le cas général.

Enfin nous donnons une application du résultat principal en direction d'une généralisation de la conjecture de Manin–Mumford.

ABSTRACT. – Let A be an abelian variety of dimension $g \geqslant 1$ defined over a number field K. We study the size of the torsion group $A(F)_{\mathrm{tors}}$ where F/K is a finite extension and more precisely we study the best possible exponent γ in the inequality $\mathrm{Card}(A(F)_{\mathrm{tors}}) \ll [F:K]^{\gamma}$ when F is any finite extension of K. In the CM case we give an exact formula for the exponent γ in terms of the characters of the Mumford–Tate group—a torus in this case—and discuss briefly the general case.

Finally we give an application of the main result in direction of a generalisation of the Manin–Mumford conjecture.

1. Introduction et résultats

Soient K un corps de nombres et A/K une variété abélienne sur K de dimension $g \geqslant 1$. Le classique théorème de Mordell–Weil assure que le groupe $A(K)$ des points K-rationnels de A est de type fini. Un problème naturel qui se pose alors est de comprendre le sous-groupe de torsion $A(K)_{\mathrm{tors}}$. Dans le cas où A est une courbe elliptique (définie) sur $\mathbb{Q}$, Mazur [9] a classifié les groupes de torsion possibles. Ceci étant, ce problème semble tout à fait hors de portée dans le cas général et un sous-problème plus raisonnable consiste à essayer de comprendre le cardinal de $A(K)_{\mathrm{tors}}$ lorsque A et K varient. Il y a essentiellement deux approches possibles pour ce problème : soit l'on fixe le corps de nombres K et l'on s'intéresse à la variation du cardinal lorsque A décrit les variétés abéliennes sur K de dimension g fixée. Dans cette direction, citons le célèbre résultat de Merel [10] : si E est une courbe elliptique sur un corps de nombres K, le cardinal de $E(K)_{\mathrm{tors}}$ est borné par une constante ne dépendant que du degré de K sur $\mathbb{Q}$. Parent [16] a rendu effectif le résultat de Merel, obtenant une borne doublement exponentielle en le degré $[K:\mathbb{Q}]$. En dimension supérieure essentiellement rien n'est connu concernant ce problème connu sous le nom de conjecture de borne uniforme. La seconde approche possible concernant le cardinal de $A(K)_{\mathrm{tors}}$ consiste à fixer une variété abélienne A définie sur un corps

0012-9593/06/© 2007 Publié par Elsevier Masson SAS.

de nombres K_0 et à faire varier K parmi les extensions finies de K_0, l'objectif étant cette fois-ci d'obtenir une borne par une constante $C(A/K_0,[K:K_0])$ avec une dépendance explicite (la meilleure possible) en le degré $[K:K_0]$ (ou, ce qui revient au même, en le degré $[K:\mathbb{Q}]$). Concernant ce second problème, Masser [7] et [8] a montré dans le cas général que la dépendance est polynomiale en $[K:\mathbb{Q}]$. La question naturelle qui se pose est alors de savoir quel est le plus petit exposant $\gamma(A)$ possible dans cette borne polynomiale. Nous donnons dans cet article une réponse à cette question dans le cas des variétés abéliennes CM. De plus, indépendamment de son intérêt propre, l'obtention d'une borne meilleure que celle de Masser a des conséquences concrètes concernant des problèmes de géométrie diophantienne (cf. théorème 1.21 ci-dessous).

Soit A/K une variété abélienne de dimension $g \geqslant 1$ sur un corps de nombres K. On utilise la notation $\ll$ pour dire à une constante près ne dépendant que de A/K et on pose

$$\gamma(A) = \inf\bigl\{x>0 \mid \forall F/K \text{ finie, } \bigl|A(F)_{\mathrm{tors}}\bigr| \ll [F:K]^x\bigr\}.$$

Dans le cas général, la meilleure estimation de ce nombre est due à Masser [7] et [8].

THÉORÈME 1.1 (Masser). – *On a* $\gamma(A) \leqslant g$.

Dans le cas des courbes elliptiques de type CM, le résultat de Masser est optimal. On peut se demander ce qu'il en est en dimension supérieure. Pour cela nous avons besoin de rappeler la notion de groupe de Mumford–Tate d'une variété abélienne A/K sur un corps de nombres.

Fixons désormais un plongement $K \subset \mathbb{C}$ et notons $\overline{K}$ une clôture algébrique de K dans $\mathbb{C}$. Soit A/K une variété abélienne. On note $V = H^1(A(\mathbb{C}),\mathbb{Q})$ le premier groupe de cohomologie singulière de la variété analytique complexe $A(\mathbb{C})$. C'est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension $2g$. Il est naturellement muni d'une structure de Hodge de type $\{(1,0),(0,1)\}$, c'est-à-dire d'une décomposition sur $\mathbb{C}$ de $V_{\mathbb{C}} := V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ donnée par $V_{\mathbb{C}} = V^{1,0} \oplus V^{0,1}$ telle que $V^{0,1} = \overline{V^{1,0}}$ où $\overline{\cdot}$ désigne la conjugaison complexe. On note $\mu : \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}} \to \mathrm{GL}_{V_{\mathbb{C}}}$ le cocaractère tel que pour tout $z \in \mathbb{C}^\times$, $\mu(z)$ agisse par multiplication par z sur $V^{1,0}$ et agit trivialement sur $V^{0,1}$. On définit le groupe de Mumford–Tate en suivant [17].

DÉFINITION 1.2. – Le *groupe de Mumford–Tate* $\mathrm{MT}(A)/\mathbb{Q}$ de A est le plus petit $\mathbb{Q}$-sous-groupe algébrique G de GL_V (vu comme $\mathbb{Q}$-schéma en groupes) tel que, après extension des scalaires à $\mathbb{C}$, le cocaractère μ se factorise à travers $G_{\mathbb{C}} := G \times_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$.

Nous faisons au paragraphe 2 des rappels concernant le groupe de Mumford–Tate, dans le cas général et plus spécifiquement dans le cas CM.

Dans le cas des variétés abéliennes simples de type CM, Ribet a donné une minoration de $\gamma(A)$. Précisément, en notant $\omega(n)$ le nombre de facteurs premiers de l'entier n et $A[n]$ l'ensemble des points de $A(\overline{K})$ d'ordre divisant n, Ribet [25] montre que

THÉORÈME 1.3 (Ribet). – *Si A/K est une variété abélienne de type CM, alors il existe deux constantes strictement positives C_1 et C_2 ne dépendant que de A et K telles que* : *pour tout entier $n \geqslant 1$,*

$$C_1^{\omega(n)} \leqslant \frac{[K(A[n]):K]}{n^d} \leqslant C_2^{\omega(n)},$$

où $d = \dim \mathrm{MT}(A)$. *De plus si A est géométriquement simple, on a $d \geqslant 2 + \log_2 g$.*

Comme corollaire du théorème 1.3, on obtient immédiatement, dans le cas où A/K est une variété abélienne de type CM, l'inégalité

$$\gamma(A) \geqslant \frac{2\dim A}{\dim \mathrm{MT}(A)}. \tag{1}$$