Bull. Sci. math. 139 (2015) 806–828

Contents lists available at ScienceDirect

Bulletin des Sciences Mathématiques

www.elsevier.com/locate/bulsci

Quelques invariants de corps de caractéristique 2 liés au $\hat{u}$-invariant ☆

Ahmed Laghribi

Université d'Artois, Faculté des Sciences Jean Perrin, Laboratoire de mathématiques de Lens – EA 2462, rue Jean Souvraz – SP18, 62307 Lens, France

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 10 janvier 2014
Disponible sur Internet le 9 décembre 2014

MSC:
11E04
11E81

Keywords:
Quadratic forms
Central simple algebras
Clifford algebras
Schur index
Isotropy
u-Invariant

RÉSUMÉ

Soient F un corps de caractéristique 2 et $T(F)$ l'ensemble des F-formes quadratiques totalement singulières (à isométrie près). Le $\hat{u}$-invariant de F est la dimension maximale d'une F-forme quadratique anisotrope. Dans cet article, on introduit de nouveaux invariants de F liés au $\hat{u}$-invariant. Le premier d'entre eux, appelé $\tilde{u}$-invariant, est la dimension maximale d'une F-forme quadratique anisotrope non totalement singulière. La motivation d'introduire cet invariant est de savoir comment les valeurs du $\hat{u}$-invariant peuvent être données sans l'utilisation des formes de $T(F)$, ceci puisque la majorité des valeurs connues du $\hat{u}$-invariant est réalisée par les formes de $T(F)$ (voir [12]). Aussi, pour $r, s \geq 1$ des entiers, on introduit le u_r-invariant (*resp.* le $\tilde{u}_s$-invariant) qui est la dimension maximale d'une F-forme quadratique anisotrope de partie régulière de dimension $2r$ (*resp.* la dimension maximale d'une F-forme quadratique anisotrope non totalement singulière de partie quasi-linéaire de dimension s). On fera une comparaison entre ces nouveaux invariants, puis on donnera une liste de valeurs qu'ils peuvent prendre, en faisant le lien avec le u-invariant et le $\hat{u}$-invariant. Aussi, on discutera la question classique, due à Baeza [3], sur l'universalité de certaines F-formes quadratiques non singulières lorsque F est de u-invariant fini.

☆ Ce travail a bénéficié d'une aide de l'Agence Nationale de la Recherche portant la référence ANR-12-BL01-0005.

Adresse e-mail : ahmed.laghribi@univ-artois.fr.

http://dx.doi.org/10.1016/j.bulsci.2014.12.003
0007-4497/

A B S T R A C T

Let F be a field of characteristic 2, and $T(F)$ the set of totally singular F-quadratic forms up to isometry. The $\hat{u}$-invariant of F is the maximal dimension of an anisotropic F-quadratic form. In this paper we introduce new invariants of F related to the $\hat{u}$-invariant. The first one, called $\tilde{u}$-invariant, is the maximal dimension of an anisotropic not totally singular F-quadratic form. The motivation of introducing this invariant is to see how the values of the $\hat{u}$-invariant can be given without the use of forms of $T(F)$, this is because most of the known values of the $\hat{u}$-invariant are realized by the forms of $T(F)$ (see [12]). Also, for $r, s \geq 1$ integers, we introduce the u_r-invariant (*resp.* the $\tilde{u}_s$-invariant) which is the maximal dimension of an anisotropic F-quadratic form having a regular part of dimension $2r$ (*resp.* the maximal dimension of an anisotropic not totally singular F-quadratic form having a quasilinear part of dimension s). We make a comparison between these new invariants by relating them to the u-invariant and the $\hat{u}$-invariant, and we give a list of values that they can take. We also discuss the classical question, due to Baeza [3], on the universality of some nonsingular F-quadratic forms when F has finite u-invariant.

1. Introduction et principaux résultats

Soit F un corps de caractéristique 2. Pour une F-forme quadratique φ d'espace sous-jacent V, on note $\mathrm{ql}(\varphi)$ sa partie quasi-linéaire qui est la restriction de φ à l'espace $\{v \in V \mid B_\varphi(v, w) = 0 \text{ pour tout } w \in V\}$, où B_φ est la forme polaire de φ. On note $\dim \varphi$ la dimension de φ. L'entier $\dim \varphi - \dim \mathrm{ql}(\varphi)$ (qui est pair) s'appelle la dimension régulière de φ, on le note $\mathrm{rdim}\, \varphi$. On dit que φ est isotrope s'il existe $v \in V \setminus \{0\}$ tel que $\varphi(v) = 0$, sinon φ est dite anisotrope. La forme φ est dite :

- non singulière si $\dim \varphi = \mathrm{rdim}\, \varphi$.
- singulière si $\dim \varphi > \mathrm{rdim}\, \varphi$.
- totalement singulière si $\mathrm{rdim}\, \varphi = 0$.
- presque totalement singulière si elle est singulière et $\mathrm{rdim}\, \varphi = 2$.

Notons $Q(F)$ (*resp.* $T(F)$) l'ensemble des F-formes quadratiques (*resp.* l'ensemble des F-formes quadratiques totalement singulières) à isométrie près. En raison de la distinction entre les formes singulières et les formes non singulières, Baeza a introduit les deux invariants suivants :

$$u(F) = \mathrm{Max}\{\dim \varphi \mid \varphi \text{ est non singulière anisotrope}\},$$

$$\hat{u}(F) = \mathrm{Max}\big\{\dim \varphi \bigm| \varphi \in Q(F) \text{ est anisotrope}\big\}.$$