ELSEVIER

Bull. Sci. math. 136 (2012) 899–903

BULLETIN DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

www.elsevier.com/locate/bulsci

Courbes rationnelles de degré 11 sur une hypersurface quintique générale de $\mathbf{P}^4$

Jean D'Almeida

Laboratoire Paul Painlevé, Mathématiques, Université de Lille 1, 59655 Villeneuve d'Ascq, France

Reçu le 30 avril 2012

Disponible sur Internet le 1er juin 2012

Résumé

On montre une forme forte de la conjecture de Clemens en degré 11 : Il existe un nombre fini de courbes rationnelles lisses de degré 11 sur une hypersurface quintique générale de l'espace projectif complexe de dimension quatre. Chaque courbe est plongée avec un fibré normal $\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-1)$.

MSC : 14H50 ; 14N05

Mots-clés : Courbes rationnelles ; Conjecture de Clemens

1. Introduction

Clemens a conjecturé que le nombre de courbes lisses rationnelles de degré fixé d sur une hypersurface quintique générale F de $\mathbf{P}^4$ est fini [1]. S. Katz a ensuite considéré la conjecture sous la forme suivante : Le schéma de Hilbert des courbes lisses rationnelles de degré d sur F est non vide, fini, réduit et chaque courbe est plongée avec un fibré normal $\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-1)$. Katz a prouvé la forme forte de la conjecture pour $d \leqslant 7$ [9]. Les cas $d = 8$ et $d = 9$ ont été traités par Nijsse [10] et Johnsen et Kleiman [7]. Le cas $d = 10$ a été traité par Vallaeys [11] et Cotterill [2]. On s'intéresse ici au cas $d = 11$. La méthode proposée ici permet aussi de traiter très simplement les cas $d \leqslant 10$. Nous utiliserons des ingrédients qui curieusement n'apparaissent pas dans les travaux précédents : des raffinements de la méthode de Castelnuovo sur la fonction de Hilbert d'un groupe de points [3,6]. Cela permet d'avoir des preuves beaucoup plus simples

Adresse e-mail : Jean.D'Almeida@math.univ-lille1.fr.

0007-4497/$ – see front matter
http://dx.doi.org/10.1016/j.bulsci.2012.06.001

que les précédentes. Je tiens à remercier L. Gruson pour ses remarques sur une première version de ce texte.

2. Notations et rappels

On désigne par $\mathcal{O}_X$ et I_{X/P^r} le faisceau structural et le faisceau d'idéaux définissant la sous-variété X de $\mathbf{P}^r$ où $\mathbf{P}^r$ est un espace projectif sur un corps algébriquement clos k. Si $\mathcal{F}$ est un faisceau cohérent sur $\mathbf{P}^r$ on note $\mathcal{F}(n) = \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_{P^r}(n)$, $H^i(\mathcal{F})$ le i-ème groupe de cohomologie et $h^i(\mathcal{F})$ sa dimension sur k. On dit qu'une courbe C est non dégénérée si elle n'est pas contenue dans un hyperplan. On dit qu'une courbe C de $\mathbf{P}^r$ est m-régulière si $h^i(I_{C/P^r}(m-i)) = 0$ pour tout $i > 0$. On note M_d l'ouvert du schéma de Hilbert paramétrant les courbes lisses irréductibles rationnelles de degré d de $\mathbf{P}^4$. M_d est irréductible de dimension $5d+1$. Si C est une courbe intègre de $\mathbf{P}^r$ on pose $M_C = \Omega^1(1) \otimes \mathcal{O}_C$ où Ω^1 est le fibré cotangent de $\mathbf{P}^r$. Si A est un fibré en droites sur C tel que $H^1(\Lambda^2 M \otimes A = 0)$ alors la courbe C est $h^0(A)$-régulière [5]. Si la courbe est rationnelle on a $M_C = \bigoplus_{i=1}^r \mathcal{O}_{P^1}(-a_i)$ avec $a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_r$. La codimension dans M_d de l'espace des courbes ayant ce type de scindage est $\sum_{i>j} \max(0, a_i - a_j - 1)$ [12]. Nous utiliserons les résultats suivants :

Lemme 2.1. *(Voir [7].) Soit $M_d(\mathbf{P}^r)$ l'ouvert du schéma de Hilbert paramétrant les courbes lisses irréductibles rationnelles de degré d. Le sous-ensemble des courbes ayant une b-sécante a une codimension supérieure ou égale à*

$$(r-1)(b-2) - b$$

pour $d \geqslant 4$, $r \geqslant 3$, $d > b \geqslant 3$.

Lemme 2.2. *(Voir [6, p. 36].) Le nombre de conditions imposées aux hypersurfaces de degré k de $\mathbf{P}^r$ par un sous-schéma Γ est la dimension de l'image du morphisme de restriction $H^0(\mathcal{O}_{P^r}(k)) \to H^0(\mathcal{O}_\Gamma(k))$. Un groupe de points Γ de degré d de $\mathbf{P}^r$ en position générale (aucun sous groupe de $r+1$ points contenu dans un hyperplan) impose au moins $\min(d, kr+1)$ conditions aux hypersurfaces de degré k de $\mathbf{P}^r$. Si $d > kr + 1$ $(2r+2$ si $k=2)$, alors Γ impose exactement $kr+1$ conditions aux hypersurfaces de degré k si et seulement si Γ est contenue dans une courbe rationnelle normale.*

3. La méthode

Soit M_d la famille des courbes lisses rationnelles de degré d de $\mathbf{P}^4$. Soit $\mathbf{P}^{125}$ l'espace des hypersurfaces quintiques de $\mathbf{P}^4$. On s'intéresse à la correspondance d'incidence $I_d = \{(C, F) \in M_d \times \mathbf{P}^{125}\}$. S. Katz a montré que la conjecture de Clemens est vraie en degré d si I_d est irréductible. Malheureusement dès que $d \geqslant 12$, I_d n'est pas irréductible [8]. Si l'on considère la projection de I_d sur M_d, la fibre au dessus d'une courbe C est l'espace projectif $\mathbf{P}^{h^0(I_{C/P^4}(5))-1}$. Si toutes ces fibres avaient la même dimension on aurait l'irréductibilité de I_d. Ce n'est pas le cas dès que $d \geqslant 8$. Johnsen et Kleiman [8] ont montré que pour établir la forme forte de la conjecture de Clemens pour $d \leqslant 24$ il suffisait de montrer que $I'd = I_d - I_{d,0}$ ne domine pas $\mathbf{P}^{125}$ où $I_{d,0} = \{(C, F) \in I_d,\ h^1(I_{C/P^4}(5)) = 0\}$. Si on pose $M_{d,i} = \{C \in M_d / h^1(I_{C/P^4}(5)) = i\}$ et $I_{d,i}$ l'image réciproque de $M_{d,i}$ dans I_d, la suite exacte

$$0 \to H^0\big(I_C(5)\big) \to H^0\big(\mathcal{O}_{P^4}(5)\big) \to H^0\big(\mathcal{O}_C(5)\big) \to H^1\big(I_C(5)\big) \to 0$$