C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 353 (2015) 1001–1005

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Algebraic geometry/Topology

Conjugate complex homogeneous spaces with non-isomorphic fundamental groups

Espaces homogènes complexes conjugués avec groupes fondamentaux non isomorphes

Mikhail Borovoi [a,1], Yves Cornulier [b,2]

[a] *Raymond and Beverly Sackler School of Mathematical Sciences, Tel Aviv University, 6997801 Tel Aviv, Israel*
[b] *Laboratoire de mathématiques d'Orsay, Université Paris-Sud, CNRS, Université Paris-Saclay, 91405 Orsay cedex, France*

ARTICLE INFO

Article history:
Received 26 May 2015
Accepted after revision 9 September 2015
Available online 21 October 2015

Presented by Jean-Pierre Serre

Keywords:
Fundamental group
Conjugate variety
Homogeneous space
Linear algebraic group

ABSTRACT

Let $X = G/\Gamma$ be the quotient of a connected reductive algebraic $\mathbf{C}$-group G by a finite subgroup Γ. We describe the topological fundamental group of the homogeneous space X, which is nonabelian when Γ is nonabelian. Further, we construct an example of a homogeneous space X and an automorphism σ of $\mathbf{C}$ such that the topological fundamental groups of X and of the conjugate variety σX are not isomorphic.

RÉSUMÉ

Soit $X = G/\Gamma$ le quotient d'un $\mathbf{C}$-groupe algébrique réductif connexe G par un sous-groupe fini Γ. On décrit le groupe fondamental topologique de l'espace homogène X, qui est non abélien quand Γ est non abélien. Puis on construit un exemple d'espace homogène X et d'automorphisme σ de $\mathbf{C}$ tels que les groupes fondamentaux topologiques de X et de la variété conjuguée σX ne sont pas isomorphes.

Version française abrégée

Soit X une variété algébrique pointée définie sur le corps $\mathbf{C}$ des nombres complexes, supposée irréductible et quasi-projective. L'espace topologique pointé $X(\mathbf{C})$ est alors connexe ; on désigne par $\pi_1(X) := \pi_1^{\mathrm{top}}(X(\mathbf{C}))$ son groupe fondamental, appelé groupe fondamental topologique de X. Soit σ un automorphisme du corps $\mathbf{C}$ (pas forcément continu). En appliquant σ aux coefficients des polynômes définissant X, on obtient une variété σX sur $\mathbf{C}$, dite variété conjuguée. Les complétés profinis des groupes $\pi_1(X)$ et $\pi_1(\sigma X)$ sont canoniquement isomorphes (comme groupes topologiques), car ils s'identifient naturellement au groupe fondamental étale de X. En revanche, les groupes $\pi_1(X)$ et $\pi_1(\sigma X)$ ne sont pas tou-

E-mail addresses: borovoi@post.tau.ac.il (M. Borovoi), yves.cornulier@math.u-psud.fr (Y. Cornulier).

[1] M.B. was partially supported by the Hermann Minkowski Center for Geometry.
[2] Y.C. was supported by ANR GSG 12-BS01-0003-01.

http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2015.09.010
1631-073X/

jours isomorphes, par un résultat de Serre [6]. Les exemples de Serre comprennent des surfaces projectives lisses. D'autres exemples ont été obtenus plus récemment : des variétés de Shimura dans [4] et [5], et des surfaces projectives dans [1] et [3] pour des choix très généraux de l'automorphisme σ (dans [3] pour tout σ dont la restriction à $\overline{\mathbf{Q}}$ diffère de l'identité et de la conjugaison complexe).

Dans cette note, nous donnons un exemple *d'espaces homogènes* conjugués avec groupes fondamentaux topologiques non isomorphes. Le plan de la note est le suivant. Nous considérons, dans le §2, les groupes fondamentaux de certains espaces homogènes topologiques de la forme G/Γ, où G est un groupe de Lie réel connexe et $\Gamma \subset G$ est un sous-groupe discret. Nous en déduisons, dans le §3, une formule explicite pour décrire le groupe fondamental $\pi_1(G/\Gamma)$ dans le cas où G est un groupe algébrique linéaire connexe défini sur $\mathbf{C}$, et Γ est un sous-groupe fini de G. En utilisant cette formule, nous construisons dans le §4 un exemple d'espace homogène affine $X = G/\Gamma$ défini sur $\mathbf{C}$ et un automorphisme σ de $\mathbf{C}$ tels que les groupes fondamentaux topologiques $\pi_1(X)$ et $\pi_1(\sigma X)$ ne sont pas isomorphes. Précisément, on choisit $G = \mathrm{SL}(n, \mathbf{C}) \times \mathbf{C}^*$ avec $n \geq 5$, et Γ un sous-groupe non abélien fini d'ordre 55. L'inclusion de Γ dans G est donnée par un plongement arbitraire de Γ dans $\mathrm{SL}(n, \mathbf{C})$ et par un homomorphisme non trivial de Γ dans $\mathbf{C}^*$. Notre formule permet de vérifier que $\pi_1(X)$ et isomorphe à $(\mathbf{Z}/11\mathbf{Z}) \rtimes_4 \mathbf{Z}$, où la notation signifie que le générateur 1 de $\mathbf{Z}$ agit sur $\mathbf{Z}/11\mathbf{Z}$ par multiplication par 4, tandis que pour σ envoyant $\zeta = \exp(2\pi i/5)$ sur ζ^2, le groupe fondamental $\pi_1(\sigma X)$ de la variété conjuguée est isomorphe à $(\mathbf{Z}/11\mathbf{Z}) \rtimes_9 \mathbf{Z}$. Un argument simple dû à Baumslag [2] permet de vérifier que ces deux groupes ne sont pas isomorphes.

1. Introduction

Let X be a pointed algebraic variety defined over $\mathbf{C}$. We assume that X is irreducible and quasi-projective. The pointed topological space $X(\mathbf{C})$ is then connected, and we denote by $\pi_1(X)$ the topological fundamental group of $X(\mathbf{C})$, i.e., $\pi_1(X) := \pi_1^{\mathrm{top}}(X(\mathbf{C}))$. Let σ be a field automorphism of $\mathbf{C}$, not necessarily continuous. Applying σ to the coefficients of the polynomials defining X, we obtain a conjugate algebraic variety σX over $\mathbf{C}$. Though the profinite completions of $\pi_1(X)$ and $\pi_1(\sigma X)$ are isomorphic, the groups $\pi_1(X)$ and $\pi_1(\sigma X)$ themselves are not necessarily isomorphic. Serre [6] obtained the first examples of conjugate varieties X and σX with $\pi_1(\sigma X) \not\simeq \pi_1(X)$. Serre's examples include smooth projective surfaces. More examples were obtained recently: Shimura varieties in [4] and [5], and smooth projective surfaces in [1] and [3] for a very general choice of σ (in [3] for any σ whose restriction to $\overline{\mathbf{Q}}$ differs from the identity and the complex conjugation).

In this note, we give an example of conjugate *homogeneous spaces* with non-isomorphic topological fundamental groups. The outline of the note is as follows. In Section 2 we consider topological homogeneous spaces of the form G/Γ, where G is a connected real Lie group and $\Gamma \subset G$ is a discrete subgroup. In Section 3 we write an explicit formula for $\pi_1(G/\Gamma)$ when G is a complex linear algebraic group and $\Gamma \subset G$ is a finite subgroup. Using this formula, we construct in Section 4 an example of an affine homogeneous space $X = G/\Gamma$ over $\mathbf{C}$ and an automorphism σ of $\mathbf{C}$ such that $\pi_1(\sigma X)$ is not isomorphic to $\pi_1(X)$. In our example, $G = \mathrm{SL}(n, \mathbf{C}) \times \mathbf{C}^*$ with $n \geq 5$, and Γ is a nonabelian finite subgroup of order 55.

2. The quotient of a Lie group by a discrete subgroup

Let

$$1 \to S \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\tau} T \to 1$$

be a short exact sequence of connected real Lie groups. Let $\Gamma \subset G$ be a discrete subgroup such that the projection $\Lambda = \tau(\Gamma) \subset T$ is discrete. Our goal is to describe $\pi_1(G/\Gamma)$, where G/Γ is viewed as a pointed manifold with base point the image of 1.

Set $\Gamma_S = \Gamma \cap S$. The homomorphism $\tau : G \to T$ induces a fibration $G/\Gamma \to T/\Lambda$ with fiber S/Γ_S, which gives rise to an exact sequence in homotopy groups

$$\pi_1(S/\Gamma_S) \xrightarrow{i_*} \pi_1(G/\Gamma) \xrightarrow{\tau_*} \pi_1(T/\Lambda) \to 1.$$

The fibration $G \to G/\Gamma$ with fiber Γ gives rise to an exact sequence in homotopy groups

$$1 \to \pi_1(G) \to \pi_1(G/\Gamma) \xrightarrow{f} \Gamma \to 1,$$

where f is a homomorphism by Lemma 2.2 below. Considering the above fibrations and also the fibrations $S \to S/\Gamma_S$, $T \to T/\Lambda$ and $G \to T$, we obtain the following commutative diagram of groups and homomorphisms with exact rows and columns: