C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 353 (2015) 1011–1015

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Géométrie différentielle

Forme semi-locale des feuilletages legendriens

Semi-local form of Legendrian foliations

Saâdi Benabbés [a], Camille Laurent-Gengoux [b], Zobida Souici-Benhammadi [a]

[a] *Département de mathématiques, Faculté des sciences, Université Badji Mokhtar, Annaba, Algérie*
[b] *Institut Élie-Cartan de Lorraine, Université de Lorraine, Metz, France*

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 23 novembre 2014
Accepté après révision le 25 juillet 2015
Disponible sur Internet le 12 octobre 2015

Présenté par Charles-Michel Marle

RÉSUMÉ

Nous donnons une forme canonique semi-locale pour les feuilletages legendriens sur une variété de contact. Ce résultat généralise une forme canonique locale donnée par Libermann et Pang au voisinage d'une sous-variété de Legendre transverse, et est à mettre en parallèle avec un résultat semi-local de Weinstein dans le cas symplectique. Au cours de la démonstration, nous introduisons une classe de cohomologie qui mesure l'obstruction à rendre plat un feuilletage en modifiant la forme de contact.

ABSTRACT

We describe a semi-local canonical form for Legendrian foliations on contact manifolds in the neighbourhood of a Legendrian submanifold. This result generalizes local results by Libermann and Pang on Legendrian foliations on contact manifolds, and is analogous to a semi-local result by Weinstein in the symplectic case. For the proof, we introduce and use a class of cohomology that obstructs the possibility to make a Legendrian foliation flat.

Abridged English version

Weinstein [7] proved that a neighbourhood of a Lagrangian submanifold transverse to a given Lagrangian foliation is symplectomorphic to the cotangent bundle of that transverse manifold. Under this isomorphism, the leaves of the Lagrangian foliation correspond to the fibres of the cotangent bundle. The cotangent bundle is therefore the unique semi-local model for Lagrangian foliations in a neighbourhood of a submanifold which is Lagrangian and transverse. For contact manifolds, what correspond to Lagrangian foliations (resp. submanifolds) are Legendrian foliations (resp. submanifolds). Libermann [4] and Pang [6] have established that, for a Legendrian submanifold transverse to a Legendrian foliation and the Reeb vector field (see Equation (1)), the local model is the jet bundle. There is however, a function that comes into the picture and whose failure of being constant measures the non-flatness of the initial foliation. The purpose of the present note is to describe the semi-local model in this same very context.

Adresses e-mail : saadibenabbesfr@yahoo.fr (S. Benabbés), camille.laurent-gengoux@univ-lorraine.fr (C. Laurent-Gengoux), zbenhamadi2000@yahoo.fr (Z. Souici-Benhammadi).

http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2015.08.004
1631-073X/

Our work in mainly based on ideas and results by Libermann [4], but it adds to them a new cohomological idea (which is, in some sense, implicit in [4]). More precisely, we construct a class of cohomology that obstructs the possibility to gauge the contact form by multiplication by a non-zero function in order to make it flat – *i.e.* such that the flow of the Reeb field preserves the foliation. In the neighbourhood of a Legendrian submanifold transverse to both the Legendrian foliation and the Reeb vector field (see Equation (1)), this obstruction class is zero, and therefore allows to gauge the contact form to find a simplified semi-local model, then to "un-gauge" it to find the semi-local model for the initial contact form.

In short, there are two main results in this paper. The first one states that, on a contact manifold (M,θ) equipped with a Legendrian foliation, there is a class in the H^1 of functions constant on the leaves of $\mathcal{F}$ which vanishes if and only if there is a nowhere vanishing function F such that $\mathcal{F}$ is flat with respect to the contact form $F\theta$. The second one is the following:

Theorem 0.1. *Let (M,θ) be a contact manifold equipped with a Legendrian foliation $\mathcal{F}$. Any Legendrian submanifold N of M transverse to $\mathcal{F}$ and the Reeb vector field, i.e. such that, for all $n\in N$:*

$$T_nN \oplus T_n\mathcal{F} \oplus \mathbb{R}\,\eta_n = T_nM, \tag{1}$$

with η being the Reeb vector field, admits a neighbourhood diffeomorphic to a neighbourhood of the zero section in the space of jets, namely $T^*N\times\mathbb{R}\to N$, through a diffeomorphisms that maps N to the zero section, that maps $\mathcal{F}$ to the fibres of the projection $T^*N\times\mathbb{R}\to N\times\mathbb{R}$ and maps θ to a 1-form of the form $H\mathrm{d}t+\lambda$ with H a function that never vanishes in a neighbourhood of the zero section, t the coordinate on $\mathbb{R}$ and λ the Liouville form on T^*N.

1. Introduction

Soit (M,θ) une variété de contact [1,5] de dimension $2n+1$. On appelle *feuilletage legendrien* un feuilletage $\mathcal{F}$ dont les feuilles sont des sous-variétés de dimension n telles que, en tout point $m\in M$, l'espace tangent $T_m\mathcal{F}$ à la feuille passant par m est compris dans le noyau de θ.

De même que toute variété symplectique de dimension $2n$ admet localement des coordonnées de Darboux, dont le modèle local est un voisinage de la section nulle dans $T^*\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ munie de la forme canonique $\sum_{i=1}^n \mathrm{d}q_i\wedge\mathrm{d}p_i$, il est bien connu [1] que toute variété de contact a pour modèle local le fibré des jets, c'est-à-dire un voisinage de la section nulle dans $T^*\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$, munie de la forme canonique $\mathrm{d}t+\sum_{i=1}^n p_i\mathrm{d}q_i$. Dans le cas symplectique, lorsqu'un feuilletage lagrangien est donné, ce difféomorphisme local peut être choisi de sorte que le feuilletage se transporte sur les fibres de la projection canonique $T^*\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$. Y. Pang [6] et particulièrement P. Libermann [4] démontrèrent que, dans le cas d'une variété de contact munie d'un feuilletage legendrien, ce feuilletage legendrien peut aussi être transporté sur les fibres de la projection canonique $T^*\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$. Dans ce cas néanmoins, l'expression de la forme de contact ne peut pas être totalement simplifiée, et on obtient seulement qu'elle est de la forme :

$$H\mathrm{d}t+\sum_{i=1}^n p_i\mathrm{d}q_i \tag{2}$$

où H est une fonction qui dépend en général de toutes les variables $p_1,q_1,\dots,p_n,q_n,t$ et ne s'annule en aucun point d'un voisinage de la section nulle.

Dans le cas symplectique, ces théorèmes locaux ont été généralisés en des théorèmes semi-locaux, c'est-à-dire valables au voisinage d'une sous-variété N lagrangienne transverse à un feuilletage lagrangien, par Weinstein [7]. Dans cette note, nous proposons un analogue semi-local en géométrie de contact au voisinage d'une sous-variété de Legendre N tranverse à la fois au feuilletage legendrien et au champ de Reeb (voir équation (3)).

Notre idée consiste à se ramener au cas plat, c'est-à-dire au cas où la fonction H qui apparaît dans (2) peut être choisie constante – ce qui revient à supposer que le feuilletage legendrien est préservé par le champ de Reeb. Un feuilletage legendrien $\mathcal{F}$ n'est évidemment pas toujours plat, mais si l'on s'autorise à multiplier la forme de contact par une fonction qui ne s'annule jamais, on peut, localement, rendre $\mathcal{F}$ plat. Une classe de cohomologie, qui se trouve dans une cohomologie naturellement associée au feuilletage, va donner une obstruction à la possibilité de faire cette opération globalement. Il se trouve qu'au voisinage d'une sous-variété de Legendre qui satisfait la condition de transversalité (3), cette classe d'obstruction s'annule, ce qui permet la simplification.

Notre résultat semi-global diffère de celui obtenu par Pang [6] sur les feuilletages legendriens. Celui-ci en effet obtient des résultats semi-globaux, voire globaux, mais en considérant le cas où les feuilles sont compactes et simplement connexes, ce qui ne peut jamais être lorsqu'on se place au voisinage d'une sous-variété transverse au sens de l'équation (3). Nous aimerions enfin faire remarquer que passer par la symplectification ne donne pas une démonstration évidente du résultat.

2. Une obstruction à la platitude des feuilletages legendriens

Soit (M,θ) une variété de contact de dimension $2n+1$, et η son champ de Reeb. On munit (M,θ) d'un feuilletage legendrien $\mathcal{F}$. On dit que $\mathcal{F}$ est *plat pour* θ si la forme fondamentale définie par Y. Pang [6] ; ainsi :

$$-\iota_\eta\mathcal{L}_X\mathcal{L}_Y\theta=\iota_{[X,\eta]\wedge Y}\mathrm{d}\theta \qquad \text{pour tous champs de vecteurs } X, Y \text{ tangents à } \mathcal{F}$$