C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 353 (2015) 767–771

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Combinatoire/Théorie des nombres

Les nombres de Stirling associés avec succession d'ordre 2, nombres de Fibonacci–Stirling et unimodalité

The 2-successive associated Stirling numbers, Fibonacci–Stirling numbers and unimodality

Hacène Belbachir, Assia Fettouma Tebtoub

USTHB, faculté des mathématiques, laboratoire RECITS, équipe CATI, DG-RSDT, BP 32, El Alia, 16111, Alger, Algérie

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 4 avril 2015
Accepté après révision le 29 juin 2015
Disponible sur Internet le 14 juillet 2015

Présenté par le comité de rédaction

RÉSUMÉ

Par une approche combinatoire, nous introduisons les *nombres de Stirling associés avec succession d'ordre* 2. On donne leur relation de récurrence et leur fonction génératrice. Par la suite, nous prouvons l'unimodalité des suites parcourant les transversales principales du triangle de Stirling de seconde espèce. Nous concluons par l'introduction des nombres de Fibonacci–Stirling.

ABSTRACT

Using a combinatorial approach, we introduce the 2-*successive associated Stirling numbers*, we give the recurrence relation, the generating function, prove their unimodality and introduce their link with the Fibonacci–Stirling numbers. We conclude by establishing the unimodality of sequences lying over diagonal rays of second kind's Stirling triangle.

Abridged English version

The 2-successive associated Stirling numbers, denoted $\left\{ {n \atop k} \right\}^{[2]}$, count the number of partitions of the set $\{1, 2, \ldots, n\}$ into k non-empty parts, so that each part contains at least two consecutive numbers. Moreover, the last element n must either form a part with its predecessor or belong to another part satisfying the previous property.

They satisfy the following recurrence relation: $\left\{ {n \atop k} \right\}^{[2]} = k\left\{ {n-1 \atop k} \right\}^{[2]} + \left\{ {n-2 \atop k-1} \right\}^{[2]}$, $n \geq 2k$, where $\left\{ {0 \atop 0} \right\}^{[2]} = 1$, $\left\{ {n \atop n-1} \right\}^{[2]} = 0$ and $\left\{ {n \atop 0} \right\}^{[2]} = 0$ $(n \geq 1)$.

The ordinary generating function of the 2-successive associated Stirling numbers is given, for $k \geq 1$, by $A_k(x) := \sum_{n \geq 2k} \left\{ {n \atop k} \right\}^{[2]} x^n = \frac{x^{2k}}{(1-x)(1-2x)\cdots(1-kx)}$, with $A_0(x) = 1$.

Adresses e-mail : hbelbachir@usthb.dz, hacenebelbachir@gmail.com (H. Belbachir), atebtoub@usthb.dz, atebtoub@gmail.com (A.F. Tebtoub).

http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2015.06.008

We establish that the sequence $\left(\left\{{n \atop k}\right\}^{[2]}\right)_k$ is strictly log-concave, thus unimodal with at most two consecutive modes, which corresponds, for a fixed n, to a sequence lying over the diagonal rays of a second kind's Stirling triangle.

We define the sequence of Fibonacci–Stirling numbers $(\varphi_n)_n$, $n \geq 2k$, by $\varphi_{n+1} := \sum_k \left\{{n-k \atop k}\right\}$, where $\varphi_0 = 1, \varphi_1 = 0$.

The Fibonacci–Stirling numbers are linked to the 2-successive associated Stirling numbers as well: $\varphi_{n+1} = \sum_k \left\{{n \atop k}\right\}^{[2]}$. The sequence (φ_n) is called the sequence of *the 2-successive associated Bell numbers*.

1. Introduction

Les nombres de Stirling de seconde espèce, notés $\left\{{n \atop k}\right\}$, comptent le nombre de partitions de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$ en k sous-ensembles non vides. Ils sont définis, pour $1 \leq k \leq n$, par la relation de récurrence suivante :

$$\left\{{n \atop k}\right\} = k \left\{{n-1 \atop k}\right\} + \left\{{n-1 \atop k-1}\right\}.$$

Les nombres de Stirling associés de seconde espèce [11], notés par $S_2(n, k)$, comptent le nombre de partitions de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$ en k sous-ensembles de taille ≥ 2. Ils vérifient la récurrence suivante :

$$S_2(n,k) = k\, S_2(n-1,k) + (n-1) S_2(n-2,k-1), \ \textit{pour} \ \ 1 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor.$$

Une suite $(a_n)_{k=0}^{n}$ est dite unimodale si : $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k \geq a_{k+1} \geq \cdots \geq a_n$, et est dite log-concave si, pour $k = 2, \ldots, n-1$, on a : $a_k^2 \geq a_{k+1} a_{k-1}$. Elle est strictement log-concave si l'inégalité est stricte. La log-concavité implique l'unimodalité [13].

Théorème 1.1 *(Inégalité de Newton [10]). Si le polynôme $a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ n'admet que des racines réelles (négatives), alors :*

$$a_k^2 \geq a_{k-1} a_{k+1} \frac{k}{k-1} \frac{n-k+1}{n-k}, \ \textit{pour} \ \ k = 2, \ldots, n-1.$$

L'inégalité de Newton implique la log-concavité stricte, voir Hammersley [8] et Erdös [7].

Le premier résultat, sur l'unimodalité dans le triangle de Pascal autre que la suite des coefficients binomiaux, est dû à Tanny et Zuker [12]. Ces derniers ont prouvé l'unimodalité de la suite $\binom{n-k}{k}$, $k = 0, 1, \ldots$. Des travaux sur l'unimodalité des suites associées aux diagonales principales du triangle de Pascal ont été réalisés, voir [2] et [4]. Plus généralement, Belbachir et Szalay [3] ont établi que les suites parcourants toutes les transversales du triangle de Pascal $\left(\binom{n-\alpha k}{u+\beta k}\right)_k$ sont log-concave et donc unimodales. La question d'identification des modes reste ouverte dans sa généralité.

Par analogie avec ces travaux, nous nous proposons d'établir l'unimodalité des suites parcourant les transversales principales du triangle de Stirling de seconde espèce. Harper [9] démontre que $\sum_k \left\{{n \atop k}\right\} x^k$ possède seulement des racines réelles négatives, il en déduit l'unimodalité. Canfield [6] établit autrement l'unimodalité de la suite $\left(\left\{{n \atop k}\right\}\right)_k$.

Dans la Section 2, nous introduisons les *nombres de Stirling associés avec succession d'ordre* 2 avec quelques propriétés combinatoires, dont la fonction génératrice. En s'inspirant de la preuve de Bòna [5], on prouve, dans la troisième section, la log-concavité des *nombres de Stirling associés avec succession d'ordre* 2 et donc l'unimodalité. Nous montrons par la suite dans la Section 4, le lien entre les *nombres de Stirling associés avec succession d'ordre* 2 et les nombres de Stirling de seconde espèce. Ce lien va nous permettre de conclure quant à l'unimodalité des transversales principales du triangle de Stirling de seconde espèce. Nous terminons notre travail en introduisant les nombres de Fibonacci–Stirling.

2. Relation de récurrence, fonction génératrice et forme explicite

On commence par introduire les nombres de Stirling associés avec succession d'ordre 2.

Définition 2.1. Les nombres de Stirling associés avec succession d'ordre 2, notés par $\left\{{n \atop k}\right\}^{[2]}$, comptent le nombre de partitions de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$ en k parts non vides, tel que chaque part contient au moins deux éléments consécutifs et que l'élément n satisfait l'une des conditions suivantes : soit il forme avec son prédécesseur une part en soi, soit il appartient à une part qui vérifie déja la propriété précédente.

Exemple 1. Pour $n = 5$, $\left\{{5 \atop 2}\right\}^{[2]}$ compte le nombre de partitions de $\{1, 2, \ldots, 5\}$ en deux parts contenant au moins deux éléments consécutifs et tel que, une des conditions soit satisfaite ; en effet, on a les partitions suivantes : $\{1, 2, 3\}\{4, 5\}$; $\{1, 2\}\{3, 4, 5\}$; $\{1, 2, 5\}\{3, 4\}$. La partition $\{2, 3\}\{1, 4, 5\}$ ne peut être considérée, car le cinquième élément n'est pas dans une part qui contient au préalable deux éléments consécutifs.

La relation de récurrence suivante est satisfaite.