C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 353 (2015) 729–734

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Functional analysis

Function spaces on quantum tori

Espaces de fonctions sur les tores quantiques

Xiao Xiong [a], Quanhua Xu [b,a], Zhi Yin [b]

[a] *Laboratoire de Mathématiques, Université de Franche-Comté, 25030 Besançon cedex, France*
[b] *School of Mathematics and Statistics, Wuhan University, Wuhan 430072, China*

A R T I C L E I N F O

Article history:
Received 11 May 2015
Accepted 3 June 2015
Available online 30 June 2015

Presented by Gilles Pisier

A B S T R A C T

We study Sobolev, Besov and Triebel–Lizorkin spaces on quantum tori. These spaces share many properties with their classical counterparts. The results announced include: Besov and Sobolev embedding theorems; Littlewood–Paley-type characterizations of Besov and Triebel–Lizorkin spaces; an explicit description of the K-functional of $(L_p(\mathbb{T}^d_\theta), W^k_p(\mathbb{T}^d_\theta))$; descriptions of completely bounded Fourier multipliers on these spaces.

R É S U M É

On considère les espaces de Sobolev, Besov et Triebel–Lizorkin sur un tore quantique $\mathbb{T}^d_\theta$ de d générateurs. Les principaux résultats comprennent : le plongement de Besov et Sobolev ; des caractérisations à la Littlewood–Paley pour les espaces de Besov et Triebel–Lizorkin ; une formule explicite de la K-fonctionnelle de $(L_p(\mathbb{T}^d_\theta), W^k_p(\mathbb{T}^d_\theta))$; l'indépendance en θ des multiplicateurs de Fourier complètement bornés sur ces espaces.

Version française abrégée

L'objectif de cette note est d'annoncer les principaux résultats de [16], qui étudie des espaces de fonctions sur les tores quantiques. Soient $d \geq 2$ et $\theta = (\theta_{kj})$ une matrice carrée d'ordre d réelle et anti-symétrique. Le tore non commutatif de d générateurs est l'algèbre universelle $\mathcal{A}_\theta$ engendrée par d opérateurs unitaires $U_1, \dots, U_d$ vérifiant :

$$U_k U_j = e^{2\pi \mathrm{i}\theta_{kj}} U_j U_k, \quad 1 \leq j, k \leq d.$$

On pose $U^m = U_1^{m_1} \cdots U_d^{m_d}$ pour $m = (m_1, \cdots, m_d) \in \mathbb{Z}^d$. Un polynôme est une somme finie de la forme suivante :

$$x = \sum_{m \in \mathbb{Z}^d} \alpha_m U^m, \quad \alpha_m \in \mathbb{C}.$$

La forme linéaire sur la famille des polynômes définie par $x \mapsto \tau(x) = \alpha_0$ s'étend alors à un état tracial fidèle sur $\mathcal{A}_\theta$. Soit $\mathbb{T}^d_\theta$ l'algèbre de von Neumann associée à la représentation GNS de τ. Elle est le tore quantique de d générateurs. Si $\theta = 0$,

E-mail addresses: xiao.xiong@univ-fcomte.fr (X. Xiong), qxu@univ-fcomte.fr (Q. Xu), hustyinzhi@163.com (Z. Yin).

http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2015.06.002
1631-073X/

$\mathbb{T}_\theta^d = L_\infty(\mathbb{T}^d)$, où $\mathbb{T}^d$ est le d-tore usuel, muni de la mesure de Haar normalisée. Pour $1 \le p \le \infty$, $L_p(\mathbb{T}_\theta^d)$ désigne l'espace L_p non commutatif construit sur $(\mathbb{T}_\theta^d, \tau)$ (voir [9] pour les espaces L_p non commutatifs). La transformée de Fourier d'un élément $x \in L_1(\mathbb{T}_\theta^d)$ est définie par

$$\widehat{x}(m) = \tau\big((U^m)^* x\big), \quad m \in \mathbb{Z}^d.$$

Soit

$$\mathcal{S}(\mathbb{T}_\theta^d) = \Big\{ \sum_{m\in\mathbb{Z}^d} a_m U^m : \{a_m\}_{m\in\mathbb{Z}^d} \text{ rapidement décroissant}\Big\}.$$

C'est une sous-algèbre dense de $\mathcal{A}_\theta$. Comme dans le cas commutatif, $\mathcal{S}(\mathbb{T}_\theta^d)$ porte une topologie naturelle localement convexe. Son dual $\mathcal{S}'(\mathbb{T}_\theta^d)$ est alors l'espace des distributions sur $\mathbb{T}_\theta^d$. Les dérivations partielles sur $\mathcal{S}(\mathbb{T}_\theta^d)$ sont déterminées par

$$\partial_j(U_j) = 2\pi\mathrm{i}\, U_j \text{ et } \partial_j(U_k) = 0, \quad k \ne j,\ 1 \le j,k \le d.$$

Pour $m = (m_1, \dots, m_d) \in \mathbb{N}^d$, on pose $D^m = \partial_1^{m_1} \cdots \partial_d^{m_d}$ et $|m|_1 = m_1 + \cdots + m_d$. Comme d'habitude, les dérivations et la transformée de Fourier se définissent sur $\mathcal{S}'(\mathbb{T}_\theta^d)$ aussi.

Fixons une fonction φ de Schwartz sur $\mathbb{R}^d$ vérifiant la condition usuelle de Littlewood–Paley :

$$\operatorname{supp}\varphi \subset \{\xi : 2^{-1} \le |\xi| \le 2\} \text{ et } \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(2^{-k}\xi) = 1,\ \xi \ne 0.$$

Pour $k \ge 0$, soit φ_k la fonction dont la transformée de Fourier est égale à $\varphi(2^{-k}\cdot)$. Définissons, pour toute distribution x sur $\mathbb{T}_\theta^d$,

$$\widetilde{\varphi}_k * x = \sum_{m\in\mathbb{Z}^d} \varphi(2^{-k}m)\widehat{x}(m) U^m .$$

Soient $1 \le p, q \le \infty$, $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, et $J^\alpha = (1 - (2\pi)^{-2}\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}$, où $\Delta = \partial_1^2 + \cdots + \partial_d^2$. Les quatre familles d'espaces étudiés sont définies comme suit :

- *espaces de Sobolev* :
$$W_p^k(\mathbb{T}_\theta^d) = \big\{x \in \mathcal{S}'(\mathbb{T}_\theta^d) : D^m x \in L_p(\mathbb{T}_\theta^d) \text{ pour tout } m \in \mathbb{N}_0^d \text{ avec } |m|_1 \le k\big\}.$$
- *espaces de Sobolev fractionnels* :
$$H_p^\alpha(\mathbb{T}_\theta^d) = \big\{x \in \mathcal{S}'(\mathbb{T}_\theta^d) : J^\alpha x \in L_p(\mathbb{T}_\theta^d)\big\}.$$
- *espaces de Besov* :
$$B_{p,q}^\alpha(\mathbb{T}_\theta^d) = \Big\{x \in \mathcal{S}'(\mathbb{T}_\theta^d) : \big(|\widehat{x}(0)|^q + \sum_{k\ge0} 2^{qk\alpha} \|\widetilde{\varphi}_k * x\|_{L_p(\mathbb{T}_\theta^d)}^q\big)^{\frac{1}{q}} < \infty\Big\}.$$
- *espaces de Triebel–Lizorkin* $(p < \infty)$:
$$F_p^{\alpha,c}(\mathbb{T}_\theta^d) = \Big\{x \in \mathcal{S}'(\mathbb{T}_\theta^d) : \big\|\big(|\widehat{x}(0)|^2 + \sum_{k\ge0} 2^{2k\alpha} |\widetilde{\varphi}_k * x|^2\big)^{\frac{1}{2}}\big\|_{L_p(\mathbb{T}_\theta^d)} < \infty\Big\}.$$

Munis de leur norme naturelle, ils sont tous des espaces de Banach.

Les résultats obtenus peuvent se classer en cinq familles : (i) propriétés fondamentales ; (ii) caractérisations ; (iii) inégalités de plongement ; (iv) interpolation ; (v) multiplicateurs de Fourier. Nos arguments se basent, de façon cruciale, sur des multiplicateurs de Fourier.

1. Introduction

The aim of this note is to announce the main results of [16], which is a continuation of our previous work [2] on harmonic analysis on quantum tori. This second part is devoted to the study of Sobolev, Besov and Triebel–Lizorkin spaces. These spaces have never been investigated so far in the quantum setting, except two special cases to our knowledge. Firstly, Sobolev spaces with the L_2-norm were studied by Spera [10] in view of applications to the Yang–Mills theory for quantum tori [11]. On the other hand, inspired by noncommutative metric spaces in noncommutative geometry, Weaver [14,15] developed the Lipschitz classes of order α for $0 < \alpha \le 1$ on quantum tori. This situation is in strong contrast with the geometry of quantum tori on which there exist a considerably long list of publications. Presumably, this deficiency is due