C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 353 (2015) 755–760

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Numerical analysis

Multiscale numerical schemes for kinetic equations in the anomalous diffusion limit

Schémas numériques multi-échelles pour les équations cinétiques dans la limite de diffusion anormale

Nicolas Crouseilles [a,b], Hélène Hivert [b], Mohammed Lemou [c,b]

[a] *IPSO, INRIA, 263, avenue du Général-Leclerc, 35000 Rennes, France*
[b] *IRMAR, Université de Rennes-1, campus de Beaulieu, 35000 Rennes, France*
[c] *IRMAR, CNRS, 35000 Rennes, France*

A R T I C L E I N F O

Article history:
Received 24 March 2015
Accepted 26 May 2015
Available online 19 June 2015

Presented by Olivier Pironneau

A B S T R A C T

We construct numerical schemes to solve kinetic equations with anomalous diffusion scaling. When the equilibrium is heavy-tailed or when the collision frequency degenerates for small velocities, an appropriate scaling should be made and the limit model is the so-called anomalous or fractional diffusion model. Our first scheme is based on a suitable micro–macro decomposition of the distribution function, whereas our second scheme relies on a Duhamel formulation of the kinetic equation. Both are *Asymptotic Preserving* (AP): they are consistent with the kinetic equation for all fixed value of the scaling parameter $\varepsilon > 0$ and degenerate into a consistent scheme solving the asymptotic model when ε tends to 0. The second scheme enjoys the stronger property of being uniformly accurate (UA) with respect to ε. The usual AP schemes known for the classical diffusion limit cannot be directly applied to the context of anomalous diffusion scaling, since they are not able to capture the important effects of large and small velocities. We present numerical tests to highlight the efficiency of our schemes.

R É S U M É

Nous construisons des schémas numériques pour résoudre les équations cinétiques dans le régime de diffusion anormale. Lorsque l'équilibre présente une queue lourde ou lorsque la fréquence de collision dégénère pour les petites vitesses, un *scaling* approprié permet d'obtenir un modèle asymptotique appelé modèle de diffusion anormale ou fractionnaire. Le premier schéma que nous construisons est basé sur une décomposition micro–macro de la fonction de distribution, tandis que le second s'appuie sur une formulation de Duhamel de l'équation de départ. Ces deux schémas sont *Asymptotic Preserving* (AP) : ils sont consistants avec l'équation cinétique lorsque le paramètre d'échelle $\varepsilon > 0$ est fixé et dégénèrent en un schéma consistant avec le modèle limite quand ε tend vers 0. Le deuxième schéma est même uniformément précis (UA) par rapport à ε. Les schémas AP qui sont connus dans le cas de la limite de diffusion classique ne peuvent pas directement s'appliquer au cas de la diffusion anormale, car ils ne permettent pas de capturer les effets

E-mail addresses: nicolas.crouseilles@inria.fr (N. Crouseilles), helene.hivert@univ-rennes1.fr (H. Hivert), mohammed.lemou@univ-rennes1.fr (M. Lemou).

http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2015.05.003

importants des petites et des grandes vitesses. Nous présentons des tests numériques pour mettre en évidence l'efficacité des schémas que nous présentons.

Version française abrégée

Le but de ce travail est de mettre en place des schémas numériques pour les équations cinétiques linéaires dans le cas de la limite de diffusion anomale. Quand la distribution d'équilibre est une fonction à queue lourde ou lorsque la fréquence de collision est dégénérée pour les petites vitesses, l'équation cinétique (1) tend vers l'équation dite de diffusion anormale (2) lorsque le paramètre d'échelle ε tend vers zéro. Dans cette limite, une raideur apparaît dans l'équation de départ et une résolution numérique directe du problème peut devenir extrêmement coûteuse, puisque les paramètres numériques doivent a priori être adaptés à ε. La construction de schémas, dits *Asymptotic Preserving* (AP), permet de répondre à cette contrainte : ces schémas restent consistants avec l'équation cinétique, tout en s'affranchissant de la contrainte sur les paramètres numériques, et dégénèrent vers l'équation limite quand ε tend vers 0.

Dans le cas de l'asymptotique de diffusion anormale, la mise en place de tels schémas s'avère plus compliquée que dans le cas classique. En effet, en plus de la raideur évoquée ci-dessus (ε tend vers 0), il est crucial de capturer les effets des grandes et petites vitesses pour que ces schémas dégénèrent vers des approximations consistantes de l'équation de diffusion anormale (2). Un schéma numérique inspiré des approches AP standard ne tiendrait pas compte de ces effets, et dégénèrerait vers une approximation d'une équation de diffusion classique et non vers celle du modèle correct de diffusion anormale.

Deux cas sont considérés dans ce travail : le cas d'un équilibre à queue lourde et celui d'une fréquence de collision dégénérée en 0. Dans les deux cas, nous construisons d'abord un schéma basé sur une décomposition micro–macro de la solution, qui fournit un schéma multi-échelle pour (1) complètement explicite en temps ; ensuite, nous présentons un schéma basé sur une formulation de Duhamel de l'équation cinétique (1) ayant une propriété plus forte que la propriété AP : la précision de ce schéma est uniforme (UA) par rapport à ε.

Dans chaque cas, l'écriture d'un schéma semi-discret en temps permet d'obtenir une formulation qui tend vers l'équation de diffusion anormale lorsque ε tend vers 0 si l'espace des vitesses est considéré comme continu et les intégrations en vitesses sont réalisées exactement. Cependant, une discrétisation directe de l'espace des vitesses pour réaliser les intégrations numériquement ne permet pas de prendre en compte les effets des grandes et petites vitesses, qui sont à l'origine de la limite de diffusion anormale. Dans ce travail, nous montrons qu'il est donc nécessaire d'effectuer des transformations sur certaines intégrales en vitesses avant de les discrétiser. En l'occurrence, nous effectuons des changements de variables adéquats pour faire apparaître naturellement les termes à l'origine de l'équation asymptotique. Nous obtenons ainsi des schémas complètement discrétisés ayant la propriété AP et UA. Nous présentons également des tests numériques qui mettent en évidence la limite de diffusion anormale de nos schémas quand ε tend vers 0. Cette note est une version abrégée de [3,4].

1. Introduction

We consider the kinetic equation

$$\varepsilon^\alpha \partial_t f + \varepsilon v \cdot \nabla_x f = Q(f) := \nu(v)\,(\rho_\nu M - f)\,, \qquad f(0,x,v) = f_0(x,v), \tag{1}$$

where f is a distribution function that depends on the time $t \ge 0$, the space variable $x \in \mathbb{R}^d$ and the velocity $v \in \mathbb{R}^d$ with $d = 1, 2, 3$, f_0 is a given initial data. In the sequel, we will denote by brackets the integration in v. We define the density ρ by $\rho(t,x) = \langle f(t,x,v)\rangle =: \int_{v\in\mathbb{R}^d} f(t,x,v)\,\mathrm{d}v$, and the quantity ρ_ν (which is not the usual density) by $\rho_\nu(t,x) = \langle \nu(v) f\rangle / \langle \nu(v) M(v)\rangle$. Note that this definition of ρ_ν ensures the local mass conservation $\langle Q(f)\rangle = 0$. The positive number ε is a scaling parameter and α is a power which will be chosen according to the physical nature of the problem (see below for more details). The equilibrium distribution function M is a normalized even function of v. We will consider two physically relevant cases, depending on the nature of the equilibrium function M (see [6,2]) and of the collision frequency ν (see [1]):

(i) **Case 1 – heavy-tail:** M is a power-tailed equilibrium and $\nu(v) = 1$. To simplify, we will consider the case $M(v) = m/(1+|v|^\beta)$ where $\beta \in (d, d+2)$ and the normalization parameter m is chosen such that $\langle M\rangle = 1$. In this case, the appropriate choice of α is: $\alpha = \beta - d \in (0,2)$.

(ii) **Case 2 – degenerate collision frequency:** $\nu(v) \underset{v\to 0}{\sim} \nu_0 |v|^{d+2+\beta}$, $\beta > 0$, $\nu_0 > 0$ and $M(v) = \frac{\mathrm{e}^{-|v|^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$. To simplify, we will consider the case $\nu(v) = \nu_0|v|^{d+2+\beta}$ for some $\beta > 0$. In this case, the appropriate choice of α is: $\alpha = (2+2d+\beta)/(1+d+\beta) \in (1,2)$.

Note that in these two cases, the quantity $D = \left\langle |v|^2 \frac{M}{\nu(v)} \right\rangle$ which usually appears as the diffusion coefficient in the classical diffusion case, is not finite. In fact, in our context, the limit for small ε of (1) is not given by diffusion but by *anomalous diffusion* equation, which can be written with a fractional Laplacian