C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 353 (2015) 583–588

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Mathematical analysis/Functional analysis

Almost commuting functions of almost commuting self-adjoint operators

Fonctions presque commutantes d'opérateurs auto-adjoints presque commutants

Aleksei Aleksandrov [a,b], Vladimir Peller [c]

[a] *St.-Petersburg Branch, Steklov Institute of Mathematics, Fontanka 27, 191023 St. Petersburg, Russia*
[b] *Department of Mathematics and Mechanics, Saint Petersburg State University, 28, Universitetski pr., St. Petersburg, 198504, Russia*
[c] *Department of Mathematics, Michigan State University, East Lansing, MI 48824, USA*

A R T I C L E I N F O

Article history:
Received 11 December 2014
Accepted 22 April 2015
Available online 11 May 2015

Presented by Gilles Pisier

A B S T R A C T

Let A and B be almost commuting (i.e, $AB - BA \in \boldsymbol{S}_1$) self-adjoint operators. We construct a functional calculus $\varphi \mapsto \varphi(A, B)$ for φ in the Besov class $B^1_{\infty,1}(\mathbb{R}^2)$. This functional calculus is linear, the operators $\varphi(A, B)$ and $\psi(A, B)$ almost commute for $\varphi, \psi \in B^1_{\infty,1}(\mathbb{R}^2)$, $\varphi(A, B) = u(A)v(B)$ whenever $\varphi(s, t) = u(s)v(t)$, and the Helton–Howe trace formula holds. The main tool is triple operator integrals.

R É S U M É

On dit que des opérateurs A et B sont presque commutants si leur commutateur $[A, B]$ appartient à la classe trace. Pour des opérateurs A et B auto-adjoints qui presque commutent, nous construisons un calcul fonctionnel $\varphi \mapsto \varphi(A, B)$, $\varphi \in B^1_{\infty,1}(\mathbb{R}^2)$, où $B^1_{\infty,1}(\mathbb{R}^2)$ est la classe de Besov. Ce calcul a les propriétés suivantes : il est linéaire, les opérateurs $\varphi(A, B)$ et $\psi(A, B)$ presque commutent pour toutes les fonctions φ et ψ dans $B^1_{\infty,1}(\mathbb{R}^2)$, $\varphi(A, B) = u(A)v(B)$ si $\varphi(s, t) = u(s)v(t)$, et la formule des traces de Helton et Howe est vraie. L'outil principal est la notion d'intégrales triples opératorielles.

Version française abrégée

Soient A et B des opérateurs auto-adjoints qui *presque commutent*, c'est-à-dire que leur commutateur $[A, B] \stackrel{\text{def}}{=} AB - BA$ appartient à la classe trace $\boldsymbol{S}_1$. Dans [6], on a obtenu la formule suivante :

$$\operatorname{trace}\left(\mathrm{i}\big(\varphi(A,B)\psi(A,B) - \psi(A,B)\varphi(A,B)\big)\right) = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) \mathrm{d}P$$

E-mail address: peller@math.msu.edu (V. Peller).

http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2015.04.012
1631-073X/

pour tous les polynômes φ et ψ de deux variables, où P est une mesure signée boréliienne à support compact. Il se trouve que la mesure P est absolument continue et

$$\mathrm{d}P(x,y)=\frac{1}{2\pi}g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

où g est la fonction principale de Pincus (voir la version en anglais pour plus d'informations).

Le calcul polynomial $\varphi\mapsto\varphi(A,B)$ a été étendu dans [4] et [12]. Dans [12] on a construit le calcul fonctionnel $\varphi\mapsto\varphi(A,B)$ pour φ appartenant à l'intersection des produit tensoriels projectifs $\mathcal{C}\stackrel{\mathrm{def}}{=}\big(L^\infty(\mathbb{R})\hat{\otimes}B^1_{\infty,1}(\mathbb{R})\big)\bigcap\big(B^1_{\infty,1}(\mathbb{R})\hat{\otimes}L^\infty(\mathbb{R})\big)$. Ce calcul est linéaire, les opérateurs $\varphi(A,B)$ et $\psi(A,B)$ presque commutent pour $\varphi,\psi\in\mathcal{C}$. En outre, si $\varphi(s,t)=u(s)v(t)$, alors $\varphi(A,B)=u(A)v(B)$. Finalement, la formule de Helton et Howe ci-dessus est vraie pour φ et ψ dans $\mathcal{C}$.

Il était aussi démontré dans [12] qu'il est impossible de construire un calcul fonctionnel $\varphi\mapsto\varphi(A,B)$ pour toutes les fonctions φ continûment dérivables qui ait les propriétés ci-dessus.

Le but de cette note est d'améliorer les résultats de [12].

Pour une fonction φ dans la classe de Besov $B^1_{\infty,1}(\mathbb{R}^2)$, nous définissons l'opérateur $\varphi(A,B)$ sous la forme :

$$\varphi(A,B)=\iint f(x,y)\,\mathrm{d}E_A(x)\,\mathrm{d}E_B(y),$$

où E_A et E_B sont les mesures spectrales des opérateurs A et B respectivement. La théorie d'intégrales doubles opératorielles a été développée par Birman et Solomyak [3] (voir aussi [10] et [2]).

Le résultat principal de cette note est basé sur la formule suivante :

$$\begin{aligned}\big[\varphi(A,B),Q\big]=&\iiint\frac{\varphi(x,y_1)-\varphi(x,y_2)}{y_1-y_2}\,\mathrm{d}E_A(x)\,\mathrm{d}E_B(y_1)[B,Q]\,\mathrm{d}E_B(y_2)\\&+\iiint\frac{\varphi(x_1,y)-\varphi(x_2,y)}{x_1-x_2}\,\mathrm{d}E_A(x_1)[A,Q]\,\mathrm{d}E_A(x_2)\,\mathrm{d}E_B(y),\end{aligned}\tag{1}$$

où $\varphi\in B^1_{\infty,1}(\mathbb{R}^2)$ et A et B sont des opérateurs auto-adjoints pour lesquels les commutateurs $[A,Q]$ et $[B,Q]$ appartiennent à $\boldsymbol{S}_1$.

Les intégrales triples opératorielles

$$\iiint\Phi(x_1,x_2,x_3)\,\mathrm{d}E_1(x_1)T\,\mathrm{d}E_2(x_2)R\,\mathrm{d}E_3(x_3)\tag{2}$$

étaient définies dans [14] pour les fonctions Φ dans le produit tensoriel projectif intégral : ici T et R sont des opérateurs bornés, et E_1, E_2, E_3 sont des mesures spectrales. Puis, dans [7], les intégrales triples opératorielles étaient définies pour les fonctions qui appartiennent au produit tensoriel de Haagerup $L^\infty(E_1)\otimes_{\mathrm{h}}L^\infty(E_2)\otimes_{\mathrm{h}}L^\infty(E_2)$ (voir [17]). Il était établi dans [1] que les conditions $T\in\boldsymbol{S}_1$ ou $R\in\boldsymbol{S}_1$ et $\Phi\in L^\infty(E_1)\otimes_{\mathrm{h}}L^\infty(E_2)\otimes_{\mathrm{h}}L^\infty(E_2)$ n'impliquent pas que l'opérateur (2) appartienne à la classe trace.

On a défini dans [1] les produit tensoriels du type de Haagerup $L^\infty(E_1)\otimes_{\mathrm{h}}L^\infty(E_2)\otimes^{\mathrm{h}}L^\infty(E_3)$ et $L^\infty(E_1)\otimes^{\mathrm{h}}L^\infty(E_2)\otimes_{\mathrm{h}}L^\infty(E_3)$ (voir la version en anglais). On a démontré dans [1] que si $T\in\boldsymbol{S}_1$, R est un opérateur borné et $\Phi\in L^\infty(E_1)\otimes_{\mathrm{h}}L^\infty(E_2)\otimes^{\mathrm{h}}L^\infty(E_3)$, alors l'opérateur (2) appartient à $\boldsymbol{S}_1$. De même, si $R\in\boldsymbol{S}_1$, T est un opérateur borné et $\Phi\in L^\infty(E_1)\otimes^{\mathrm{h}}L^\infty(E_2)\otimes_{\mathrm{h}}L^\infty(E_3)$, alors l'opérateur (2) appartient à $\boldsymbol{S}_1$.

Si $\varphi\in B^1_{\infty,1}(\mathbb{R}^2)$, alors la fonction $(x_1,x_2,y)\mapsto\big(\varphi(x_1,y)-\varphi(x_2,y)\big)(x_1-x_2)^{-1}$ appartient à l'espace $L^\infty(E_A)\otimes_{\mathrm{h}}L^\infty(E_A)\otimes^{\mathrm{h}}L^\infty(E_B)$ et la fonction $(x,y_1,y_2)\mapsto\big(\varphi(x,y_1)-\varphi(x,y_2)\big)(y_1-y_2)^{-1}$ appartien à $L^\infty(E_A)\otimes_{\mathrm{h}}L^\infty(E_B)\otimes^{\mathrm{h}}L^\infty(E_B)$, voir [1]. Donc les intégrales dans (1) sont bien définies est appartiennent à $\boldsymbol{S}_1$.

La formule (1) implique que, si φ et ψ appartiennent à $B^1_{\infty,1}(\mathbb{R}^2)$ et A et B sont des opérateurs auto-adjoints qui presque commutent, alors

$$\begin{aligned}\big[\varphi(A,B),\psi(A,B)\big]=&\iiint\frac{\varphi(x,y_1)-\varphi(x,y_2)}{y_1-y_2}\,\mathrm{d}E_A(x)\,\mathrm{d}E_B(y_1)[B,\psi(A,B)]\,\mathrm{d}E_B(y_2)\\&+\iiint\frac{\varphi(x_1,y)-\varphi(x_2,y)}{x_1-x_2}\,\mathrm{d}E_A(x_1)[A,\psi(A,B)]\,\mathrm{d}E_A(x_2)\,\mathrm{d}E_B(y)\end{aligned}$$

et

$$\big\|\big[\varphi(A,B),\psi(A,B)\big]\big\|_{\boldsymbol{S}_1}\le\mathrm{const}\,\|\varphi\|_{B^1_{\infty,1}(\mathbb{R}^2)}\|\psi\|_{B^1_{\infty,1}(\mathbb{R}^2)}\big\|[A,B]\big\|_{\boldsymbol{S}_1}.$$

Ceci implique que la formule des traces de Helton et Howe est vraie pour toutes les fonctions φ et ψ dans $B^1_{\infty,1}(\mathbb{R}^2)$.