C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 353 (2015) 273–277

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Statistique

Choix du paramètre de lissage dans l'estimation à noyau d'une matrice de transition d'un processus semi-markovien

Choice of the smoothing parameter in the kernel estimation of the transition matrix of a semi-Markovian process

Mouloud Cherfaoui, Mohamed Boualem, Djamil Aïssani, Smail Adjabi

Laboratoire de modélisation et d'optimisation des systèmes (LAMOS), université de Béjaia, Targa-Ouzamour, 06000 Algérie

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 7 août 2013
Accepté après révision le 12 septembre 2014
Disponible sur Internet le 19 janvier 2015

Présenté par le comité de rédaction

RÉSUMÉ

Dans cette Note, nous étudions le problème du choix du paramètre de lissage pour un estimateur à noyau de l'opérateur de transition d'une chaîne de Markov. Pour ce faire, nous avons considéré la file d'attente $GI/M/1/N$. Nous avons constaté que l'estimateur du paramètre de lissage choisi, par la minimisation d'une certaine norme matricielle, donne de meilleurs résultats, en termes de vitesse de convergence de l'erreur quadratique moyenne, que les alternatives classiques.

ABSTRACT

In this Note, we study the problem of choosing the smoothing parameter for a kernel estimator of the transition operator of a Markov chain. To do this, we have considered the $GI/M/1/N$ queue. The proposed smoothing parameter performs better than the existing classical methods in terms of convergence rate of the mean square error.

1. Introduction

Dans la théorie classique de l'estimation paramétrique d'une matrice de transition associée à une chaîne de Markov, nous disposons de plusieurs méthodes, décrites dans [2], qui présentent l'avantage d'être simples à utiliser. Toutefois, il est difficile d'estimer avec précision des matrices de transition modélisant des phénomènes complexes. Pour pallier cette difficulté, nous faisons appel aux méthodes d'estimation non paramétriques. Ces dernières ont fait l'objet de travaux établis par Roussas [9], en utilisant la méthode du noyau. Les résultats obtenus par celui-ci ont été complétés par Masry et Györfi [7] et par Basu et Sahoo [1], parmi d'autres. Par la suite, Laksaci et Yousfate [6] ont étudié un estimateur à noyau de la densité de l'opérateur de transition, vu comme un endomorphisme de L^p, $p \in [1, \infty[$. Cet estimateur permet de construire un

Adresses e-mail : cherfaouimouloud@yahoo.fr (M. Cherfaoui), robertt15dz@yahoo.fr (M. Boualem), lamos_bejaia@hotmail.com (D. Aïssani), adjabi@hotmail.com (S. Adjabi).

http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2014.09.030
1631-073X/

estimateur fonctionnel aussi bien pour l'opérateur de transition que pour son adjoint. Leur principal résultat fournit une majoration de la vitesse de convergence (au sens de la norme L^p) de l'estimateur construit.

Dans cette Note, l'objectif principal est d'estimer une matrice de transition inconnue $\mathbb{P}$, associée à une file d'attente, par la méthode de noyau. Plus précisément, notre étude se focalise sur la qualité de l'estimateur de $\mathbb{P}$ par rapport aux procédures de sélection du paramètre de lissage. Afin de réaliser cette étude, nous avons considéré le système particulier $GI/M/1$ (*FIFO*, N). Pour cela, nous avons effectué une étude comparative des résultats obtenus par les méthodes classiques de sélection du paramètre de lissage et par d'autres méthodes qui se basent sur les normes matricielles. Contrairement aux méthodes classiques, ces dernières prennent en considération la loi des temps de service, qui joue le rôle d'une pondération de la distribution générale des inter-arrivées dans les éléments de la matrice de transition du système considéré. Le choix du modèle $GI/M/1$ (*FIFO*, N) est motivé par la disponibilité de ses caractéristiques sous des formes explicites dans la littérature des files d'attente [5]. Par conséquent, afin d'avoir une idée sur la qualité de l'estimateur de $\mathbb{P}$, les matrices de transition peuvent être calculées avec exactitude et les erreurs de calcul numérique (qui peuvent être engendrées par la machine) peuvent ainsi être évitées.

2. Choix du paramètre de lissage

Nous nous intéressons au choix du paramètre de lissage dans l'estimation à noyau, de la matrice de transition, qui minimise un certain critère d'erreur. Pour cela, supposons qu'on dispose d'un n-échantillon $T_1, T_2, \ldots, T_n$, qui représente les durées des inter-arrivées, dans un système $GI/M/1/N$, ayant comme densité de probabilité inconnue g. L'estimation de la matrice de transition, $\mathbb{P}$, de la chaîne de Markov induite associée au système $GI/M/1/N$, donnée par :

$$P_{ij} = \begin{cases} \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-\mu t}(\mu t)^{i-j+1}}{(i-j+1)!} g(t)\,\mathrm{d}t, & \text{si } 1 \le j \le i+1 \le N, \\ \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-\mu t}(\mu t)^{N-j}}{(N-j)!} g(t)\,\mathrm{d}t, & \text{si } 1 \le j \le N \text{ et } i = N, \\ 1 - \sum_{k=1}^{N} P_{ik}, & \text{si } j = 0, \\ 0, & \text{sinon}, \end{cases} \tag{1}$$

consiste à évaluer la densité inconnue g et de substituer son estimateur, noté g_h, dans les P_{ij}. Dans notre cas, nous optons pour le critère *MISE* et le premier noyau gamma proposé par Chen [4], qui remplacera les noyaux usuels donnés dans [8]. Alors, nous obtenons la formule explicite de g_h, donnée par :

$$g_h(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} K(t,h)(T_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{T_i^{t/h}\mathrm{e}^{-T_i/h}}{h^{(t/h)+1}\Gamma((t/h)+1)}, \tag{2}$$

où K désigne la densité de la loi gamma de paramètres $(\frac{t}{h}+1, h)$ et où $h = h(n)$ est le paramètre de lissage. Le paramètre de lissage optimal h_1^* se calcule comme suit :

$$\begin{aligned} h_1^* &= \arg\min_h MISE(g, g_h) = \arg\min_h \int_0^\infty \mathbb{E}\big(g(t) - g_h(t)\big)^2\,\mathrm{d}t \\ &= \arg\min_h \left[h^2 \int_0^\infty \left\{ g'(t) + \frac{1}{2} t g''(t) \right\}^2 \mathrm{d}t + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} n^{-1} h^{-1/2} \int_0^\infty t^{-1/2} g(t)\,\mathrm{d}t + o\big(n^{-1}h^{-1/2} + h^2\big) \right] \\ &\approx \left[\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty t^{-1/2} g(t)\,\mathrm{d}t \right]^{2/5} \left[\int_0^\infty \left\{ g'(t) + \frac{1}{2} t g''(t) \right\}^2 \mathrm{d}t \right]^{-2/5} 4^{-2/5} n^{-2/5}. \end{aligned} \tag{3}$$

Dans le but de prendre en considération les pondérations, nous proposons l'utilisation des normes matricielles qui ont un impact sur la qualité de l'estimateur de $\mathbb{P}$, noté $\hat{\mathbb{P}}$. En effet, l'utilisation des normes matricielles nous permet d'inclure les pondérations qui sont d'une loi de Poisson, de paramètre $\mu * t$, de la quantité $g(t)$ dans l'expression des P_{ij} lors de l'estimation de $\mathbb{P}$. Dans ce cas, le paramètre de lissage optimal est calculé selon l'une des trois expressions suivantes :

$$h_2^* = \arg\min_h \|\hat{\mathbb{P}} - \mathbb{P}\|_1 = \arg\min_h \left[\max_j \left(\sum_{i=0}^{N} |\hat{P}_{ij} - P_{ij}| \right) \right], \tag{4}$$

$$h_3^* = \arg\min_h \|\hat{\mathbb{P}} - \mathbb{P}\|_2 = \arg\min_h \left[\sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{N} (\hat{P}_{ij} - P_{ij})^2 \right]^{1/2}, \tag{5}$$

$$h_4^* = \arg\min_h \|\hat{\mathbb{P}} - \mathbb{P}\|_\infty = \arg\min_h \left[\max_i \left(\sum_{j=0}^{N} |\hat{P}_{ij} - P_{ij}| \right) \right], \tag{6}$$