C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 353 (2015) 523–527

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Partial differential equations/Numerical analysis

# Wave splitting for time-dependent scattered field separation

## *Décomposition d'ondes pour la séparation de champs diffractés dans le domaine temporel*

Marcus J. Grote [a], Marie Kray [a], Frédéric Nataf [b,c,d], Franck Assous [e]

[a] *Department of Mathematics and Computer Sciences, University of Basel, Spiegelgasse 1, CH-4051 Basel, Switzerland*
[b] *CNRS, UMR 7598, Laboratoire Jacques-Louis-Lions, 75005 Paris, France*
[c] *UPMC Univ Paris 06, UMR 7598, Laboratoire Jacques-Louis-Lions, 75005 Paris, France*
[d] *INRIA Rocquencourt, Alpines, BP 105, 78153 Le Chesnay cedex, France*
[e] *Department of Computer Sciences and Mathematics, Ariel University, 40700 Ariel, Israel*

ARTICLE INFO

*Article history:*
Received 19 December 2014
Accepted after revision 6 March 2015
Available online 4 April 2015

Presented by Haïm Brézis

ABSTRACT

Starting from classical absorbing boundary conditions, we propose a method for the separation of time-dependent scattered wave fields due to multiple sources or obstacles. In contrast to previous techniques, our method is local in space and time, deterministic, and also avoids a priori assumptions on the frequency spectrum of the signal.


RÉSUMÉ

À partir des conditions aux limites absorbantes classiques, nous proposons une méthode dans le domaine temporel pour la séparation des champs d'onde diffractés dus à des sources ou des obstacles multiples. Contrairement aux techniques antérieures, notre procédé est local en temps et en espace, déterministe, et ne dépend pas de connaissances *a priori* du spectre de fréquence du signal.


**Version française abrégée**

Lorsqu'une onde incidente éclaire un objet, le champ diffracté contient de nombreuses informations sur ses propriétés. Cependant, si les sources ne sont pas totalement connues (position ou dépendance en temps) ou que d'autres sources indésirables interfèrent, la détermination du champ diffracté par soustraction du champ incident au champ total est un problème difficile. Cette difficulté apparaît par exemple dans les techniques d'imagerie médicale utilisant des produits de contraste à microbulles [13,12].

Ce problème posé dans le domaine fréquentiel est étudié dans de nombreux articles, voir par exemple [15,6,1,4] ou [5]. Il a, en revanche, été beaucoup moins étudié dans le domaine temporel. Dans [7,8], des conditions absorbantes pour des

*E-mail addresses:* marcus.grote@unibas.ch (M.J. Grote), marie.kray@unibas.ch (M. Kray), nataf@ann.jussieu.fr (F. Nataf), franckassous@netscape.net (F. Assous).

http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2015.03.008
1631-073X/

problèmes de diffraction multiple ont été développées. Dans [14], le cas temporel est traité par la transformée de Fourier dans le domaine fréquentiel. Dans cette note, on présente une méthode, locale en espace et en temps, qui ne nécessite pas d'information *a priori* sur le contenu fréquentiel du signal.

On considère une onde se propageant dans un domaine contenant deux objets diffractants inclus dans des cercles disjoints $S_1$ et $S_2$ de centre $C_1$ et $C_2$, voir Fig. 1. Le champ diffracté $u$, qui vérifie l'équation (1), est la somme de deux champs sortants de $S_1$ et de $S_2$ respectivement, voir (2). À partir de la donnée de $u$ enregistrée sur une courbe $\Gamma$, on détermine de manière approchée les champs $u_1$ et $u_2$. Pour ce faire, on introduit $B_1$ (resp. $B_2$), une condition absorbante centrée en $C_1$ (resp. $C_2$), qui fournit l'équation (4). Appliquées au champ $u$, elles donnent une deuxième équation (5) vérifiée par le premier terme du développement asymptotique (3) de $u_1$ et $u_2$. En combinant ces équations avec des changements de variables adaptés, on montre que $f_1$ (resp. $f_2$), le premier terme du développement asymptotique de $u_1$ (resp. $u_2$), vérifie une équation hyperbolique du premier ordre posée sur la courbe d'observation $\Gamma$, voir (7). Cette équation est résolue par un schéma de Crank–Nicholson en temps et un schéma décentré amont en espace. La méthode est illustrée par l'exemple d'une source inconnue illuminant un objet diffractant également inconnu, voir Fig. 1. Le champ total résultant enregistré sur un arc de cercle $\Gamma$ est décomposé en deux champs sortants : $u_1$ le champ incident et $u_2$ le champ diffracté par l'objet, voir Fig. 2. Les simulations numériques des champs diffractés ont été effectuées par une méthode d'éléments finis à l'aide du logiciel FreeFem++ [10]. Le principe de la méthode est valable en dimension quelconque d'espace.

## 1. Introduction

When an incident wave illuminates a target, be it rigid or penetrable, it generates a scattered wave that carries information about the obstacle across the host medium. Clearly, that information is readily available by subtraction of the incident wave from total field measurements. However, if the location, spatial distribution or time dependence of the original source are not precisely known, or other undesired sources interfere with the signal, the extraction of the scattered field of interest becomes non-trivial, though it remains essential for any subsequent inversion. In transcranial ultrasonic imaging, for instance, intense ultrasound pulses induce a single cavitation bubble whose collapse generates a small shock wave, then recorded by a standard ultrasound imaging array [13]; clearly, the bubble's time signature is never precisely known. Similarly, the detection of individual free-floating and targeted microbubbles of an ultrasound contrast agent is critical for quantifying the amount of bubbles in the tissue [12].

In the presence of several obstacles, each primary scattered wave will induce secondary scattered waves from all other obstacles, which again will induce further scattered waves, and so forth. Together with the incident wave, their superposition results in the measured total wave field. The inversion from the total wave field for multiple obstacles at once adds yet another layer of complexity to any algorithm for inverse scattering problems. Hence, if their superposition can be split into individual outgoing components, we can apply any algorithm for single inverse scattering to each scatterer separately. As a consequence, each isolated scattering problem will be smaller in size and less ill-conditioned than their total sum.

In the frequency domain, there is a long history of wave splitting techniques for multiple scattering problems. In his classical work, Twerksy expresses multiple scattering coefficients in terms of algebraic relations that couple the multipole coefficients of isolated scatterers—see [15] for a review. More recently, Grote and Kirsch [6] used wave splitting to derive nonreflecting boundary conditions for multiple scattering problems. Similarly, Acosta [1] formulated on-surface radiation conditions for multiple scattering. In [4], Ben Hassen, Liu and Potthast split the far-field pattern using integral based formulations to extend the point source method to inverse scattering of multiple obstacles. By combining the inverse Radon approximation with a Galerkin ansatz, Griesmaier, Hanke and Sylvester determine the convex scattering support of individual far-field components separately [5].

In the time domain, little work on inverse multiple scattering problems is available. In [7,8], nonreflecting boundary conditions for time-dependent multiple scattering were derived, which avoid the space-time integrals involved in standard integral-based formulations. By Fourier transform in the frequency domain, Potthast, Fazi and Nelson [14] devised a filter via the point source method for time-dependent source separation. Here we propose a method to determine the separate outgoing components of the incident and scattered wave fields for time-dependent multiple scattering problems. In contrast to previous work, our approach is local in space and time, deterministic, and also avoids any a priori assumptions on the frequency spectrum of the signal.

## 2. Wave splitting

We consider wave scattering from two bounded disjoint scatterers in unbounded two- or three-dimensional space. Each scatterer may contain several obstacles, inhomogeneities and nonlinearity. Next, we assume that both scatterers are well separated, that is we assume that we can surround them by two non-intersecting spheres $S_1$ and $S_2$ centered at $C_1$ and $C_2$, respectively—see Fig. 1. In the unbounded region $\Omega$ outside the two spheres, we assume that the medium is homogeneous, isotropic, and source-free. Hence the scattered field $u$ satisfies:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = 0 \qquad \text{in } \Omega,\ t > 0, \tag{1}$$