C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 351 (2013) 747–752

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Partial differential equations/Numerical analysis

Cauchy problems with modified conditions for the Euler–Poisson–Darboux equations in the hyperbolic space

Problèmes de Cauchy avec des conditions modifiées pour les équations d'Euler–Poisson–Darboux dans l'espace hyperbolique

Cheikh Ould Mohamed El-Hafedh, Elbar Ould Ely Telmoudy, Mohamed Vall Ould Moustapha

Unité de recherche "Analyse, EDP et modélisation", faculté des sciences et techniques (FST), université des sciences, de technologie et de la medécine (USTM), B.P. 5026, Mauritania

ARTICLE INFO

Article history:
Received 2 May 2013
Accepted after revision 31 July 2013
Available online 23 October 2013

Presented by the Editorial Board

ABSTRACT

In this note, we give the solutions of the Cauchy problems for the Euler–Poisson–Darboux equations (EPD) with modified conditions in the hyperbolic space with application to the wave equation.

RÉSUMÉ

On donne les solutions explicites des problèmes de Cauchy pour les équations d'Euler–Poisson–Darboux, avec des conditions modifiées dans l'espace hyperbolique avec application à l'équation des ondes.

Version française abrégée

Dans [2], le premier et le troisième auteur ont obtenu les solutions explicites des problèmes de Cauchy avec des conditions modifiées pour les équations d'Euler–Poisson–Darboux dans l'espace euclidien. Dans ce travail nous donnons les solutions explicites des problèmes de Cauchy avec des conditions modifiées pour les équations d'Euler–Poisson–Darboux dans l'espace hyperbolique. Noter que le problème de Cauchy classique pour l'équation d'Euler–Poisson–Darboux dans l'espace hyperbolique est considéré dans [4] et [5] :

$$\begin{cases} (a) \quad L_n U(t,x) = A_t^{\mu} U(t,x), \quad 0 < t,\ x \in \mathbb{H}^n \\ (b)'' \quad U(0,x) = f(x), \quad \partial_t U(0,x) = 0; \quad f \in C^\infty(\mathbb{H}^n). \end{cases} \tag{$(E_\mu^n)''$}$$

Plus explicitement, nous nous intéressons à la famille de problèmes :

$$\begin{cases} (a) \quad L_n U(t,x) = A_t^{\mu} U(t,x), \quad 0 < t,\ x \in \mathbb{H}^n \\ (b) \quad U(0,x) = f(x), \quad \lim_{t\to 0} t^{1-2\mu} \partial_t U(t,x) = g(x); \quad f, g \in C^\infty(\mathbb{H}^n) \end{cases} \tag{E_μ^n}$$

E-mail addresses: cheikh976@yahoo.fr (C.O.M. El-Hafedh), elbar@nasr.mr (E.O.E. Telmoudy), mohamedvall.ouldmoustapha230@gmail.com (M.V. Ould Moustapha).

1631-073X/$ – see front matter
http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2013.07.026

$$\begin{cases} (a)' & A_x^{\nu} U(t,x) = A_t^{\mu} U(t,x), \quad 0<t,\ 0<x \\ (b)' & U(0,x) = f(x), \quad \lim_{t\to 0} t^{1-2\mu}\partial_t U(t,x) = g(x); \quad f,g \in C^{\infty}(\mathbb{R}_+) \end{cases} \tag{$(E_{\mu}^{\nu})'$}$$

où L_n est l'opérateur de Laplace–Beltrami associé à l'espace Riemannien hyperbolique $\mathbb{H}^n$, donné en coordonnées géodésiques polaires par :

$$L_n = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + (n-1)\coth r \frac{\partial}{\partial r} + \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 + \Lambda(r) \tag{0.1}$$

avec $\Lambda(r)$ un opérateur differentiel du second ordre sur la sphère $\mathbb{S}^{n-1}(r)$ de rayon r. L'opérateur A_x^{ν} est donné par :

$$A_x^{\nu} := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (1-2\nu)\coth x \frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{1-2\nu}{2}\right)^2. \tag{0.2}$$

Remarquons que, dans $(E_{\mu}^{n})''$, la deuxième donnée est nulle ($g=0$), car une solution de l'équation (a) ne saurait être régulière pour $t=0$ que si sa dérivée première par rapport à t s'y annule. Les conditions modifiées (b) et $(b)'$ permettent de prendre la deuxième donnée comme une fonction quelconque g, nulle ou non, tout en recouvrant les conditions de Cauchy classiques $(b)''$. Ainsi, les problèmes de Cauchy $(E_{\frac{1}{2}}^{n})$ et $(E_{\frac{1}{2}}^{\nu})'$ correspondent respectivement aux équations classique (voir [3], [7] et [1]) et radiale (Théorème 2) des ondes dans $\mathbb{H}^n$. Les résultats principaux de cet article – Théorèmes 1, 2 et 3 – sont donnés dans l'introduction et leurs applications sont dans la section 6.

1. Introduction

This work is motivated by the paper [2], in which are formulated and solved the Cauchy problems with modified conditions for the classical and radial Euler–Poisson–Darboux equations in the Euclidean space. The aim of this paper is to formulate and to discuss the analogous modified Cauchy problems for the Euler–Poisson–Darboux equations in the hyperbolic space. The classical Cauchy problem associated with the Euler–Poisson–Darboux equation $(E_{\mu}^{n})''$ has been studied in [4] and [5]. Therefore, we generalize and unify several results of this equation. The obtained results are applied to the classical wave equation on $\mathbb{H}^n$ (see [3], [7] and [1]). The main results in this note are as following:

Theorem 1 *(Classical EPD with modified initial conditions). Let $\mu \in (0, \frac{1}{2})$. The Cauchy problem (E_{μ}^{n}) with modified conditions for the classical Euler–Poisson–Darboux equation on the hyperbolic space has the unique solution given by*:

$$U(t,x) = \alpha_{n,-\mu}(\sinh t)^{2\mu}\left(\frac{\partial}{\sinh t\partial t}\right)^{\frac{n-1}{2}} \int_{r<t} f(x')\left(\sinh^2\frac{t}{2} - \sinh^2\frac{r}{2}\right)^{-\mu-\frac{1}{2}} \mathrm{d}\mu(x')$$
$$+ \frac{1}{2\mu}\alpha_{n,\mu}\left(\frac{\partial}{\sinh t\partial t}\right)^{\frac{n-1}{2}} \int_{r<t} g(x')\left(\sinh^2\frac{t}{2} - \sinh^2\frac{r}{2}\right)^{\mu-\frac{1}{2}} \mathrm{d}\mu(x')$$

when n is odd,

$$U(t,x) = \beta_{n,-\mu}(\sinh t)^{2\mu}\left(\frac{\partial}{\sinh t\partial t}\right)^{\frac{n}{2}} \int_{r<t} f(x')\left(\sinh^2\frac{t}{2} - \sinh^2\frac{r}{2}\right)^{-\mu} \mathrm{d}\mu(x')$$
$$+ \frac{1}{2\mu}\beta_{n,\mu}\left(\frac{\partial}{\sinh t\partial t}\right)^{\frac{n}{2}} \int_{r<t} g(x')\left(\sinh^2\frac{t}{2} - \sinh^2\frac{r}{2}\right)^{\mu} \mathrm{d}\mu(x')$$

when n is even, where

$$\alpha_{n,\mu} = \frac{1}{2}\frac{\Gamma(1+2\mu)}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\Gamma^2(\frac{1}{2}+\mu)}, \qquad \beta_{n,\mu} = \frac{4^{\mu}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}$$

and $r = d(x,x')$ is the geodesic distance between x and x' in $\mathbb{H}^n$.

Theorem 2 *(Radial wave equation). Let $\nu < \frac{1}{2}$. The Cauchy problem $(E_{\frac{1}{2}}^{\nu})'$ for the radial wave equation on the hyperbolic space has the unique solution given by*:

$$U(t,x) = \int_0^{+\infty} f(x')\frac{\partial}{\partial t}W(t,x,x')(\sinh x')^{1-2\nu}\,\mathrm{d}x' + \int_0^{+\infty} g(x')W(t,x,x')(\sinh x')^{1-2\nu}\,\mathrm{d}x'$$