



ELSEVIER

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com



Probability theory

Moment formulae for general point processes

*Formules de moments pour des processus ponctuels quelconques*

Laurent Decreusefond, Ian Flint

Institut Telecom, Telecom ParisTech, CNRS LTCI, 46, rue Barrault, 75634 Paris, France

ARTICLE INFO

Article history:

Received 16 October 2013

Accepted after revision 21 November 2013

Available online 21 February 2014

Presented by Jean-Pierre Kahane

ABSTRACT

The goal of this paper is to generalize most of the moment formulae obtained in [6]. More precisely, we consider a general point process μ , and show that the relevant quantities to our problem are the so-called Papangelou intensities. Then, we show some general formulae to recover the moment of order n of the stochastic integral of a random process. We will use these extended results to study a random transformation of the point process. The full proofs can be found in [2].

© 2013 Académie des sciences. Published by Elsevier Masson SAS. All rights reserved.

R É S U M É

L'objectif de ce papier est de généraliser la plupart des formules de moments obtenues dans [6]. Nous calculons les moments de tous ordres des intégrales stochastiques d'un processus ponctuel en fonction de son intensité de Papangelou. Nous utilisons ensuite ces résultats pour généraliser la formule d'isométrie de Skorohod pour les intégrales stochastiques compensées. Enfin, nous étudions la loi d'une transformation aléatoire du processus ponctuel sous une condition de cyclicité qui généralise la notion d'adaptabilité à un espace de dimension quelconque.

© 2013 Académie des sciences. Published by Elsevier Masson SAS. All rights reserved.

Version française abrégée

Les processus ponctuels constituent un cadre très général permettant de modéliser un nombre important de phénomènes. Ainsi, un nombre important d'outils ont été développés pour permettre une étude fine d'un processus ponctuel quelconque (cf. [1] et [3]). Pourtant, en pratique, c'est souvent le processus ponctuel de Poisson qui est favorisé pour nombre de ses propriétés abondamment étudiées. Notre objectif est de généraliser les formules de [4,5] au cas d'un processus ponctuel quelconque, ou presque. Pour obtenir nos résultats, nous ne pouvons pas recourir aux mêmes types de preuves que dans [6], vu que celles-ci reposent principalement sur des outils de calcul de Malliavin développés uniquement dans le cadre poissonnien. Pour être plus précis, nous cherchons à calculer les moments de tous ordres d'objets du type $\sum_{x \in \xi} u(x, \xi)$, où ξ est une configuration sur un espace polonais et u un processus stochastique. Ainsi, nous obtenons le Théorème 1, qui généralise ce qui a été obtenu dans [6] pour un processus ponctuel de Poisson. Ce théorème généralise aussi ceux de [1] qui concernent un processus ponctuel général, mais uniquement pour une fonction $u(x, \xi)$ ne dépendant que de x . Notre démonstration est basée principalement sur l'équation de Georgii–Nguyen–Zessin rappelée en (2). Elle implique la notion

E-mail addresses: laurent.decreusefond@mines-telecom.fr (L. Decreusefond), ian.flint@mines-telecom.fr (I. Flint).

d'intensité de Papangelou $c(x, \xi)$, définie intuitivement comme la densité de probabilité d'avoir une particule en x sachant que l'on observe la configuration ξ .

Puis nous en déduisons un opérateur de divergence, traditionnellement défini pour un processus ponctuel de Poisson, et que nous généralisons à un processus ponctuel quelconque via la formule (4). Nous sommes de même en mesure de calculer les moments de $\delta(u)$, mais surtout en déduisons le Corollaire 4, qui généralise la formule d'isométrie bien connue dans le cas du processus ponctuel de Poisson. Enfin, nous considérons une transformation $\tau(x, \xi)$ qui perturbe les particules x d'une configuration selon $\tau(\xi) := \sum_{x \in \xi} \delta_{\tau(x, \xi)}$, où ici δ est la fonction de Dirac. Nous caractérisons dans le Théorème 5 la mesure transformée. Les conditions imposées ici sur la transformation τ sont les mêmes que dans le cas du processus ponctuel de Poisson. Les preuves de tous nos résultats peuvent être trouvées dans [2].

1. Introduction

Point processes constitute a general framework used to model a wide variety of phenomena. The underlying theory is well understood, and the relevant literature is abundant (see [1] and [4] for example). However, we have a much deeper understanding of the Poisson point process, which is one of the reasons for its use in a lot of practical cases. In particular, one has a chaos-expansion of Poisson functionals, concentration inequalities, moment formulae, etc. [5,6]. On the other hand, one lacks most of these tools for more general point processes. Our goal is to obtain moment formulae for very general point processes that are only required to have a Papangelou intensity.

We will follow the path of [7], in which some moment formulae were obtained for the Poisson point process (PPP). In particular, the main result of [7] is the following formula, obtained in the case of the PPP:

$$\mathbb{E} \left[\left(\int u_y(\xi) \xi(dy) \right)^n \right] = \sum_{\{P_1, \dots, P_k\} \in \mathcal{T}_n} \mathbb{E} \left[\int_{E^k} u_{x_1}^{|P_1|} \dots u_{x_k}^{|P_k|}(\xi \cup x_1 \cup \dots \cup x_k) \lambda(dx_1) \dots \lambda(dx_k) \right], \tag{1}$$

where \mathcal{T}_n is the set of all partitions of $\{1, \dots, n\}$, $|P_i|$ is the cardinality of P_i , $i = 1, \dots, k$, and $u : E \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ is a nonnegative measurable process.

The proofs in [7] are mostly based on Malliavin calculus based formulas. Our proofs, which can be found in [2], valid for almost any point processes, are mainly based on the Georgii–Nguyen–Zessin formula. Our results also allow us to study random transformations of point processes. In the case of a general point process μ , we will consider a random transformation τ , such that each particle x of the configuration ξ is moved to $\tau(x, \xi)$. Then, we obtain an explicit characterization of $\tau\mu$ if we only assume that τ is invertible and satisfies a cyclicity condition.

2. Notations and general results

Let E be a Polish space, $\mathcal{O}(E)$ the family of all non-empty open subsets of E and \mathcal{B} denote the corresponding Borel σ -algebra. λ is a Radon measure on (E, \mathcal{B}) . Let \mathcal{X} (resp. \mathcal{X}_0) be the space of locally finite (resp. finite) subsets in E , also called the configuration space, equipped with the vague topology. We denote by \mathcal{F} (resp. \mathcal{F}_0) the corresponding σ -algebra. For a given $\xi = \sum_{y \in \xi} \varepsilon_y$, we will usually view ξ as a set, and write $\xi \cup y_0 = \xi \cup \{y_0\}$ for the addition of a particle at y_0 and $\xi \setminus y_0 = \xi \setminus \{y_0\}$ for the removal of a particle at y_0 . Moreover, for a measurable nonnegative $u : E \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$, we will often use the notation $\int u(y, \xi), \xi(dy) := \sum_{y \in \xi} u(y, \xi)$. A point process μ is said to have correlation functions $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ if for any A_1, \dots, A_n disjoint bounded Borel subsets of E ,

$$\mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^n \xi(A_i) \right] = \int_{A_1 \times \dots \times A_n} \rho_n(x_1, \dots, x_n) \lambda(dx_1) \dots \lambda(dx_n).$$

Recall that ρ_1 is the mean density of particles with respect to λ , and $\rho_n(x_1, \dots, x_n) \lambda(dx_1) \dots \lambda(dx_n)$ is the probability of finding a particle in the vicinity of each x_i , $i = 1, \dots, n$.

The reduced Campbell measure of a point process μ is the measure C_μ on the product space $(E \times \mathcal{X}, \mathcal{B} \otimes \mathcal{F})$ defined by

$$C_\mu(A \times B) = \int \sum_{x \in \xi} \mathbf{1}_A(x) \mathbf{1}_B(\xi \setminus x) \mu(d\xi),$$

where $A \in \mathcal{B}$ and $B \in \mathcal{F}$. We will thus assume throughout this paper that the following condition is fulfilled:

Hypothesis 1 (Condition (Σ_λ)). The point process μ is assumed to satisfy condition (Σ_λ) , i.e. $C_\mu \ll \lambda \otimes \mu$.

Henceforth, any Radon–Nikodym density c of C_μ relative to $\lambda \otimes \mu$ is called a version of the Papangelou intensity of μ . More generally, we set

$$c(\{x_1, \dots, x_n\}, \xi) = \prod_{k=1}^n c(x_k, \xi \cup x_1 \cup \dots \cup x_{k-1}),$$

Download English Version:

<https://daneshyari.com/en/article/4669889>

Download Persian Version:

<https://daneshyari.com/article/4669889>

[Daneshyari.com](https://daneshyari.com)