C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 352 (2014) 405–409

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Partial differential equations/Numerical analysis

Homogenization of heat diffusion in a cracked medium

Équation de la chaleur dans un milieu fracturé

Xavier Blanc [a], Benjamin-Édouard Peigney [b]

[a] *Laboratoire Jacques-Louis-Lions, université Paris-7-Denis-Diderot, bâtiment Sophie-Germain, 5, rue Thomas-Mann, 75205 Paris cedex 13, France*

[b] *CEA-DAM Île de France, Bruyères-le-Chatel, 91297 Arpajon cedex, France*

ARTICLE INFO

Article history:
Received 8 April 2013
Accepted after revision 5 March 2014
Available online 3 April 2014

Presented by Alain Bensoussan

ABSTRACT

We develop in this Note a homogenization method to tackle the problem of a diffusion process through a cracked medium. We assume that the cracks are orthogonal to the surface of the material, where an incoming heat flux is applied. The cracks are supposed to be of depth 1, of small width, and periodically arranged. We show that the cracked surface of the domain induces a volume source term in the homogenized equation.

RÉSUMÉ

Nous présentons dans cette Note une méthode originale pour traiter la propagation de la chaleur dans un milieu fracturé. Nous considérons ici le cas de fractures perpendiculaires à l'axe du matériau, de profondeur unité, et disposées périodiquement. Nous montrons que la perturbation du flux induite par la fracture peut être redistribuée en un terme source en volume dans l'équation homogénéisée.

© 2014 Académie des sciences. Published by Elsevier Masson SAS. All rights reserved.

Version française abrégée

Dans cette Note, on traite le cas de la diffusion linéaire dans un milieu périodique fracturé. Nous montrons que l'effet des fractures sur l'énergie du système peut être modélisé par un terme source en volume au sein du milieu homogénéisé. L'analyse asymptotique du problème de départ (1)–(2) conduit à la formulation du modèle homogénéisé (10)–(11) pour lequel il est nécessaire d'introduire des conditions de transmission à l'interface correspondant à la singularité en pointe des fissures. Nous montrons en particulier que la solution u, et son gradient $\partial_n u$, y subissent un saut.

Nous mettons au point une approche par point fixe consistant à résoudre successivement ((13) – gauche) dans le sous-domaine Ω^+ intact, et ((13) – droite) dans le sous-domaine Ω^- contenant les fractures (voir Fig. 1). Nous montrons ainsi que le problème (10)–(11) est bien posé. Cela nous donne au passage une méthode de construction de la solution, que nous exploiterons à des fins numériques.

Nous énonçons alors la proposition 2.2, où l'on établit que la solution du problème exact (1)–(2) défini dans la géométrie fracturée Ω_ε converge faiblement vers la solution de (10)–(11) défini dans le domaine homogénéisé Ω, ne contenant plus

E-mail addresses: blanc@ann.jussieu.fr (X. Blanc), benjamin.peigney@mines-paris.org (B.-É. Peigney).

http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2014.03.003

la description des fractures (voir Fig. 1). La preuve rigoureuse de la proposition 2.2 sera exposée dans une publication ultérieure [4].

Enfin, nous appliquons la méthode du point fixe précédemment décrite pour résoudre numériquement (10)–(11). Nous développons une approche équivalente en écrivant la formulation faible du problème écrite dans tout le domaine homogénéisé conduisant à l'équation (14), caractérisée par la présence d'une masse de Dirac localisée en pointe de fissure. Ces deux méthodes donnent des résultats cohérents avec le calcul direct de la fracture.

1. Motivation and setting of the problem

We consider the propagation of heat through a cracked medium, exposed to an incoming energy flux.

Physically, the exchange surface between the medium and the source may be greatly modified by the fractures. This may have a significant impact on the energy balance of the considered system. In many situations, the geometry of the cracked media is too intricate to be described precisely. Thus, we cannot model the surface of the cracked medium directly. Besides, the shape of the fractures may have a stochastic feature and it may involve many spatial scales. Full numerical simulations of such multi-scaled media become hence infeasible.

That is why we have been looking for an *average* approach, to capture the effects of cracks in a homogenized medium. The model presented here is simple enough to be coupled to standard Finite Element codes. The physical idea behind the method developed in this Note, called "MOSAIC" (Method Of Sinks Averaging Inhomogeneous behavior of Cracked media), is to treat the flux enhancement induced by the crack as a volume *source term* in the homogenized energy equation. We will show that this can be justified rigorously by homogenization theory.

For the sake of simplicity, we shall assume a linear behavior law of the material.[1]

The linear diffusion problem can thus be modeled by:

$$\begin{cases} \partial_t u_\varepsilon - \Delta u_\varepsilon = 0 & \text{in } \Omega_\varepsilon, \\ \partial_n u_\varepsilon = 0 & \text{on } \Gamma_\varepsilon^0 \\ \partial_n u_\varepsilon = 1 & \text{on } \Gamma_\varepsilon^1, \\ \partial_n u_\varepsilon = \dfrac{\alpha-\beta}{2}\varepsilon & \text{on } \Gamma_\varepsilon^\alpha, \\ \partial_n u_\varepsilon = \dfrac{\beta}{\alpha} & \text{on } \Gamma_\varepsilon^\beta. \end{cases} \tag{1}$$

We also need an initial condition:

$$u_\varepsilon(x, y, t = 0) = u^0(x, y), \tag{2}$$

so that problem (1)–(2) is well-posed.

We impose $u_\varepsilon(x, y, t)$ to be periodic of period ε with respect to the variable y. The domain Ω_ε, as well as the boundaries $\Gamma_\varepsilon^0, \Gamma_\varepsilon^1, \Gamma_\varepsilon^\alpha, \Gamma_\varepsilon^\beta$ are defined in Fig. 1. As suggested by the drawing, the left part of the figure is a zoom in the y variable of the small shaded area in Ω.

The period $\varepsilon > 0$ is supposed to be small and will tend to 0, whereas $\alpha \in [0, 1)$ is a fixed parameter related to the width of the crack. The parameter $\beta \in [0, \alpha)$ measures the portion of the flux which, coming through the segment $\{x = -1, -\alpha\varepsilon/2 < y < \alpha\varepsilon/2\}$, reaches the bottom Γ_ε^β of the crack. The remaining part of the incoming flux is distributed on the horizontal part of the boundary, namely $\Gamma_\varepsilon^\alpha$. The parameter β is supposed to be fixed. The boundary conditions in (1) are defined in such a way that the total incoming flux is exactly equal to 1, which is the value we impose on the left boundary in the case $\alpha = 0$ (no crack). A space–time dependence of the flux applied on the boundaries $\Gamma_\varepsilon^\alpha$ may be introduced but it does not affect the homogenization process that we describe here.

Similar homogenization problems have already been tackled in [1,2] or [5] but the geometry, the equation type as well as the boundary conditions were not the same as the one considered here.

2. Asymptotic expansion and homogenized equation

To carry out an asymptotic expansion of the solution u_ε of (1) in powers of ε, we "scale" the variable y, in the spirit of [3]. Actually, 2 scales describe the model: the variable y is the macroscopic one, whereas $\frac{y}{\varepsilon}$ represents the "microscopic geometry". Thus, we define:

$$u_\varepsilon(x, y, t) = v_\varepsilon\left(x, \frac{y}{\varepsilon}, t\right),$$

so that v_ε is periodic of period 1 in y. Applying the change of variable in (1), we can write the system satisfied by v_ε:

[1] But the results given here could be extended to the non-linear (power law) case.