C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 351 (2013) 877–882

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Mathematical analysis/Numerical analysis

A posteriori error majorants of the modeling errors for elliptic homogenization problems

Majorations a posteriori de l'erreur de modélisation de problèmes elliptiques homogénéisés

Sergey I. Repin [a], Tatiana S. Samrowski [b], Stefan A. Sauter [c]

[a] *University of Jyväskylä, Mattilanniemi 2, 40100 Jyväskylä, Finland*
[b] *School of Engineering, Technikumstrasse 9, 8400 Winterthur, Switzerland*
[c] *Institut für Mathematik, Universität Zürich, Winterthurerstrasse 190, CH-8057 Zurich, Switzerland*

A R T I C L E I N F O

Article history:
Received 24 August 2013
Accepted after revision 22 October 2013
Available online 9 November 2013

Presented by Philippe G. Ciarlet

Dedicated to Dietrich Braess on the occasion of his 75th birthday

A B S T R A C T

In this paper, we derive new two-sided a posteriori estimates of the modeling errors for linear elliptic boundary value problems with periodic coefficients solved by homogenization. Our approach is based on the concept of functional a posteriori error estimation. The estimates are obtained for the energy norm and use solely the global flux of the non-oscillatory solution of the homogenized model and solution of a boundary value problem on the cell of periodicity.

R É S U M É

Dans cette Note, nous obtenons de nouvelles estimations de l'erreur de modélisation pour des problèmes elliptiques linéaires d'homogénéisation à coefficients périodiques. Notre approche est fondée sur le concept d'estimation a posteriori fonctionnelle. Nos estimations sont obtenues pour la norme d'énergie et utilisent seulement le flux de la solution non oscillante du problème homogénéisé et la solution d'un problème aux limites sur la cellule de périodicité.

Version française abrégée

Dans cette Note, on considère des problèmes d'homogénéisation elliptiques du type $\operatorname{div}(\mathbf{A}_\varepsilon \nabla u_\varepsilon) + f = 0$ dans un domaine à frontière lipschitzienne, où la matrice $\mathbf{A}_\varepsilon$ est définie par (1.2), $\varepsilon > 0$ est un petit paramètre et $\Pi_{\mathbf{i}}^\varepsilon := \mathbf{x_i} + \varepsilon\hat{\Pi}$ est la cellule définie par $\mathbf{x_i}$ et par la translation et la dilatation de la cellule de référence $\hat{\Pi}$ (dans toute la Note, $\mathbf{x}$ désigne le système de cordonnées globales dans Ω et $\mathbf{y}$ le système de cordonnées locales dans la cellule de référence $\hat{\Pi}$).

Il est bien connu (cf., e.g., [1,2]) que pour $\varepsilon > 0$ petit, une bonne approximation peut être obtenue sous la forme $w_\varepsilon^1 = u_0 - \varepsilon\psi^\varepsilon \mathbf{N}^{\mathrm{per}} \cdot \nabla u_0$, où u_0 est solution du problème homogénéisé (1.4), $\mathbf{N}^{\mathrm{per}}$ est défini par (2.2) et (2.4), et ψ^ε est une fonction de troncature (cf., e.g., [2]).

E-mail addresses: sergey.repin@jyu.fi (S.I. Repin), samo@zhaw.ch (T.S. Samrowski), stas@math.uzh.ch (S.A. Sauter).

1631-073X/$ – see front matter
http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2013.10.025

L'objectif principal de cette Note est d'obtenir une borne supérieure entièrement calculable de la différence entre u_ε et w_ε^1 pour la norme d'énergie (2.5), qui représente l'erreur occasionnée par la solution homogénéisée.

Théoremè. *Soit $\hat{\Pi}$ un domaine convexe, $f \in L^2(\Omega)$, et $u_0 \in H^2(\Omega)$. Alors :*

$$\left\| \nabla\left(u_\varepsilon - w_\varepsilon^1\right)\right\|_{\mathbf{A}_\varepsilon} \leqslant \mathcal{M}_\oplus\left(w_\varepsilon^1, \hat{\boldsymbol{\eta}}, \boldsymbol{\lambda}, s\right) := \mathcal{F}^{1/2}\left(w_\varepsilon^1; \hat{\boldsymbol{\eta}}, \boldsymbol{\lambda}, s\right) + \varepsilon^s \tilde{C} \|\operatorname{div} \hat{\boldsymbol{\eta}}\|_{\hat{\Pi}}, \tag{0.1}$$

où la constante $\tilde{C}$ est définie par le Théorème 2.1 et $\mathcal{F}$ est défini par (2.7) et (2.8). L'estimation est vraie pour tout $\hat{\boldsymbol{\eta}} \in \mathbf{H}_0(\hat{\Pi}, \operatorname{div})$, $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_i)_{i=1}^d \in \mathbb{R}_{>0}^d$, et $s \in \mathbb{R}$.

Il est facile de voir que le membre de droite de (0.1) est la somme de deux termes positifs qui incluent une fonction arbitraire $\boldsymbol{\eta}$ définie sur $\hat{\Pi}$. Il s'ensuit que le calcul de cette estimation repose sur le flux de la solution homogénéisée et un choix approprié de la fonction $\boldsymbol{\eta}$. Les paramètres scalaires λ_i et la puissance s peuvent être choisis de façon à minimiser cette estimation. On remarquera que cette estimation ne fait pas appel à une approximation du flux associé au problème périodique initial.

Remarque. Si la structure périodique est grossière et consiste en relativement peu de cellules (25–100) et si les coefficients de la matrice $\hat{\mathbf{A}}$ ont des sauts ou des oscillations, alors le terme $\varepsilon^s \boldsymbol{\eta}$ est susceptible d'augmenter de façon significative le flux homogénéisé. Si la structure périodique est fine, alors le terme correctif est moins important et son influence peut être diminuée en augmentant la valeur de s. Dans le cas limite, i.e., lorsque $s \to +\infty$, on obtient la version suivante simplifiée de l'estimation de l'erreur :

$$\left\| \nabla\left(u_\varepsilon - w_\varepsilon^1\right)\right\|_{\mathbf{A}_\varepsilon} \leqslant \overline{\mathcal{M}}_\oplus(u_0, \varepsilon) := \|\mathbf{G}\|_{\mathbf{A}_\varepsilon},$$

où $\mathbf{G}$ est défini par (2.7). L'estimation ne contient alors aucune constante dépendant du domaine ni de fonction auxiliaire, et peut être alors calculée à partir de $\hat{N}_k$ et u_0.

1. Introduction

We will consider boundary value problems with periodic structures that arise in various applications such as composite materials. Within the framework of the homogenization theory (see, e.g., [2]), the behaviour of a heterogeneous media is described with the help of a certain homogenized problem, which is typically a boundary value problem with smooth coefficients, and the solution of a specially constructed problem with periodic boundary conditions. In this paper, our goal is to derive an a posteriori estimate of the modeling error generated by homogenization. The error majorant employs the solution of the homogenized problem and, thus, is an a posteriori estimate.

The method is based on functional a posteriori estimates that allow one to treat modelling as well as numerical errors within a unified concept; for a comprehensive introduction and overview, we refer the reader to [4,7].

We are concerned with homogenized models of an elliptic boundary value problem with periodical coefficients. Let $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ be a bounded domain with Lipschitz boundary $\partial\Omega$ such that, for a small scale parameter $\varepsilon > 0$, we have $\Omega = \bigcup_{\mathbf{i}} \Pi_{\mathbf{i}}^\varepsilon$, where

$$\Pi_{\mathbf{i}}^\varepsilon = \mathbf{x_i} + \varepsilon\hat{\Pi} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \;\middle|\; \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x_i}}{\varepsilon} \in \hat{\Pi} \right\}$$

denote the dilation and translation of the basic "cell" $\hat{\Pi}$; $\mathbf{x_i}$ is the *reference* point of $\Pi_{\mathbf{i}}^\varepsilon$. By $\mathbf{x}$ we denote the global (Cartesian) coordinate system in $\mathbb{R}^d$ and by $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \ldots, i_d)$ the counting multi-indices for the cells. The notations $\bigcup_{\mathbf{i}}$ and $\sum_{\mathbf{i}}$ are shorthands for the union and summation over all cells.

In the basic cell, we denote the Cartesian coordinates by $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$. For any $\Pi_{\mathbf{i}}^\varepsilon$, local and global coordinates are related by $\mathbf{y} = \frac{\mathbf{x}-\mathbf{x_i}}{\varepsilon} \in \hat{\Pi}$ for all $\mathbf{x} \in \Pi_{\mathbf{i}}^\varepsilon$ and all $\mathbf{i}$.

The diffusion matrix in the periodic setting is given via the cell matrix function $\hat{\mathbf{A}} \in L^\infty(\hat{\Pi}, \mathbb{R}_{\mathrm{sym}}^{d\times d})$, where $\mathbb{R}_{\mathrm{sym}}^{d\times d}$ denotes the set of symmetric $d \times d$-matrices. We assume that:

$$c_1|\xi|^2 \leqslant \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{y})\xi \cdot \xi \leqslant \rho(\hat{\mathbf{A}})|\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d \ \forall \mathbf{y} \in \hat{\Pi} \text{ a.e.}, \tag{1.1}$$

where $0 < c_1 \leqslant c_2 < \infty$. The global matrix $\mathbf{A}_\varepsilon(\mathbf{x})$ defines the periodic structure on Ω:

$$\mathbf{A}_\varepsilon(\mathbf{x}) := \hat{\mathbf{A}}\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x_i}}{\varepsilon}\right) \quad \forall \mathbf{x} \in \Pi_{\mathbf{i}}^\varepsilon \ \forall \mathbf{i}. \tag{1.2}$$

For $f \in L^2(\Omega)$, we consider the second-order elliptic equation with homogeneous Dirichlet boundary conditions in variational formulation: Find $u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ such that: