C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 352 (2014) 89–94

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Lie algebras/Harmonic analysis

Intertwining operators and the restriction of representations of rank-one orthogonal groups

Opérateurs d'entrelacement et restriction des représentations des groupes orthogonaux de rang un

Toshiyuki Kobayashi [a], Birgit Speh [b]

[a] *Kavli IPMU (WPI), Graduate School of Mathematical Sciences, the University of Tokyo, 3-8-1 Komaba, Tokyo, 153-8914, Japan*
[b] *Department of Mathematics, Cornell University, Ithaca, 14853-4201, NY, USA*

A R T I C L E I N F O

Article history:
Received 2 August 2013
Accepted after revision 26 November 2013
Available online 2 January 2014

Presented by Michel Duflo

A B S T R A C T

We give a complete classification of intertwining operators (*breaking symmetry operators*) between spherical principal series representations of $O(n+1,1)$ and $O(n,1)$ together with explicit formulae of the distribution kernels. Further we use this to determine the breaking symmetry operators between their irreducible composition factors.

R É S U M É

Nous donnons une classification complète des opérateurs d'entrelacement (*opérateurs de brisure de symétrie*) entre les représentations des séries principales sphériques de $O(n+1,1)$ et de $O(n,1)$ ainsi que des formules explicites pour les noyaux de Schwartz de ces opérateurs. Par la suite, nous déterminons les opérateurs de brisure de symétrie entre les facteurs irréductibles des séries de composition correspondantes.

Version française abrégée

Introduction

Toute représentation π d'un groupe G définit, par restriction, une représentation $\pi_{|G'}$ d'un sous-groupe donné $G' \subset G$. En général, ce foncteur ne préserve pas l'irréductibilité. Si G est un groupe compact, alors toute représentation irréductible et continue π de G est de dimension finie et la restriction $\pi_{|G'}$ est isomorphe à une somme directe des représentations irréductibles π' de G' avec certaines multiplicités $m(\pi,\pi')$. Ces multiplicités sont étudiées à l'aide des techniques combinatoires. Toutefois, aucun algorithme pour retrouver les $m(\pi,\pi')$ n'est connu à l'heure actuelle lorsque G' n'est pas compact. Par ailleurs, si G' est non compact et la représentation π est de dimension infinie, alors la restriction de π à G' n'est pas, en général, une somme directe de représentations irréductibles [3], et l'on doit considérer une notion alternative de multiplicité.

Pour une représentation continue π d'un groupe de Lie réductif réel G dans un espace de Banach H_π, le sous-espace H_π^∞ des vecteurs C^∞ de H_π est équipé naturellement d'une topologie de Fréchet, et (π, H_π) donne lieu à une

E-mail addresses: toshi@ms.u-tokyo.ac.jp (T. Kobayashi), bes12@cornell.edu (B. Speh).

1631-073X/$ – see front matter
http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2013.11.018

représentation continue π^∞ de G dans H_π^∞. Étant donné une autre représentation continue π' d'un sous-groupe réductif G', nous considérons l'espace des opérateurs continus d'entrelacement que l'on appellera *opérateurs de brisure de symétrie* :

$$\mathrm{Hom}_{G'}\big(\pi^\infty, (\pi')^\infty\big).$$

La dimension $m(\pi, \pi')$ de cet espace est déterminée par le $(\mathfrak{g}, K)$-module sous-jacent de π et le $(\mathfrak{g}', K')$-module sous-jacent de π' et cela d'une façon indépendante du choix des globalisations π et π'. Nous utilisons la même notation $m(\pi, \pi')$ pour désigner cette dimension et l'appelons la *multiplicité* de π' dans la restriction $\pi_{|G'}$. Cette notion fournit une information importante sur la restriction de π à G'. Notons que cette définition reste valable pour des représentations non unitaires.

En général, $m(\pi,\pi')$ peut être infini. En effet, il a été démontré dans [6] que la multiplicité $m(\pi,\pi')$ est finie pour toutes les représentations irréductibles π de G et π' de G' si et seulement si le sous-groupe parabolique minimal P' de G' possède une orbite ouverte dans la variété de drapeaux rélle G/P, et $m(\pi,\pi')$ est uniformément bornée si et seulement si le sous-groupe de Borel de $G'_{\mathbb{C}}$ possède une orbite ouverte dans la variété de drapeaux complexe de $G_{\mathbb{C}}$. Par exemple, $m(\pi,\pi')$ est uniformément bornée si les algèbres de Lie $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}')$ de (G, G') sont des formes rélles de $(\mathfrak{sl}(n+1,\mathbb{C}), \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}))$ ou encore de $(\mathfrak{o}(n+1,\mathbb{C}), \mathfrak{o}(n,\mathbb{C}))$. Par ailleurs, des propriétés plus fines des multiplicités de la restriction d'une représentation admissible et irréductible du groupe $G = O(n)$ sur un corps local à un sous-groupe de la forme $G' = O(n-1)$ sont formulées par la conjecture de Gross et Prasad [1].

Dans la présente note, nous décrivons les multiplicités des représentations des séries principales sphériques ainsi que leurs séries de composition pour les groupes $G = O(n+1, 1)$ et $G' = O(n, 1)$.

Soit $I(\lambda)$ l'espace des vecteurs C^∞ d'une représentation de la série principale sphérique de G, et $J(\nu)$ celui de G', où $\lambda, \nu \in \mathbb{C}$. La paramétrisation est choisie de telle sorte que $I(\lambda)$ contient une sous-représentation de dimension finie si et seulement si $-\lambda \in \mathbb{N}$, et $J(\nu)$ en contient une si et seulement si $-\nu \in \mathbb{N}$. Définissons $L_{\mathrm{even}} \subset //$ par :

$$L_{\mathrm{even}} := \big\{(-i, -j)\colon\ j \leqslant i \text{ et } i \equiv j \bmod 2\big\},$$
$$// := \big\{(\lambda, \nu) \in \mathbb{C}^2\colon\ \lambda - \nu = 0, -2, -4, \ldots\big\}.$$

Nous obtenons :

Théorème 0.1.

$$m\big(I(\lambda), J(\nu)\big) = \begin{cases} 1 & si\ (\lambda, \nu) \in \mathbb{C}^2 \setminus L_{\mathrm{even}}, \\ 2 & si\ (\lambda, \nu) \in L_{\mathrm{even}}. \end{cases}$$

Afin de donner des formules explicites pour ces opérateurs de brisure de symétrie, nous réalisons $I(\lambda)$ dans un sous-espace de $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ par restriction à une cellule de Bruhat ouverte, et $J(\nu)$ dans $C^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$.

Théorème 0.2. *Il existe une famille d'opérateurs d'entrelacement $\tilde{\mathcal{A}}_{\lambda,\nu} \in \mathrm{Hom}_{G'}(I(\lambda), J(\nu))$ qui dépend holomorphiquement de $(\lambda, \nu) \in \mathbb{C}^2$, qui soit non nulle pour tout $(\lambda, \nu) \in \mathbb{C}^2 \setminus L_{\mathrm{even}}$ et dont le noyau de Schwartz $\widetilde{K}_{\lambda,\nu}(x - y, x_n)$ est donné pour $((x, x_n), y) \in \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^{n-1}$ par :*

$$\widetilde{K}_{\lambda,\nu}(x, x_n) := \frac{1}{\Gamma(\frac{\lambda+\nu-n+1}{2})\Gamma(\frac{\lambda-\nu}{2})} |x_n|^{\lambda+\nu-n}\big(|x|^2 + x_n^2\big)^{-\nu}.$$

Parmi les propriétés importantes des opérateurs de brisure de symétrie, citons l'existence du prolongement analytique en $(\lambda, \nu) \in \mathbb{C}^2$ et le fait qu'ils satisfont à des équations fonctionnelles avec les opérateurs d'entrelacement de Knapp–Stein de G et de G', respectivement. Le support du noyau de tout opérateur de brisure de symétrie est un sous-ensemble fermé et invariant par G' de $G/P \times G'/P'$. En calculant les résidus des opérateurs de brisure de symétrie, nous obtenons une nouvelle et simple preuve de la formule pour les opérateurs différentiels conformément covariants $\tilde{\mathcal{C}}_{\lambda,\nu}$ pour le plongement $S^{n-1} \hookrightarrow S^n$ qui ont récemment été découverts par A. Juhl [2]. Plus précisément, pour $(\lambda, \nu) \in //$, posons $l := \frac{1}{2}(\nu - \lambda)$ et définissons un opérateur différentiel :

$$\tilde{\mathcal{C}}_{\lambda,\nu} = \mathrm{rest} \circ \sum_{j=0}^{l} \frac{2^{2l-2j}}{j!(2l-2j)!} \prod_{i=1}^{l-j}\left(\frac{\lambda+\nu-n-1}{2} + i\right) \Delta_{\mathbb{R}^{n-1}}^{j} \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{2l-2j}.$$

Ici, rest dénote la restriction à l'hyperplan $x_n = 0$. Ceci donne un opérateur différentiel d'entrelacement $\tilde{\mathcal{C}}_{\lambda,\nu} : I(\lambda) \to J(\nu)$, d'ordre $2l$.

Théorème 0.3. (*Voir Théorème* 3.5)

$$\mathrm{Hom}_{G'}\big(I(\lambda), J(\nu)\big) = \begin{cases} \mathbb{C}\tilde{A}_{\lambda,\nu} & si\ (\lambda, \nu) \in \mathbb{C}^2 \setminus L_{\mathrm{even}}, \\ \mathbb{C}\Gamma(\frac{\lambda-\nu}{2})\tilde{A}_{\lambda,\nu} \oplus \mathbb{C}\tilde{C}_{\lambda,\nu} & si\ (\lambda, \nu) \in L_{\mathrm{even}}. \end{cases}$$