C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 352 (2014) 123–128

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Partial differential equations

Finite and infinite speed of propagation for porous medium equations with fractional pressure

Vitesse de propagation finie et infinie pour des équations du milieu poreux avec une pression fractionnaire

Diana Stan, Félix del Teso, Juan Luis Vázquez

Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma de Madrid, Campus de Cantoblanco, 28049 Madrid, Spain

ARTICLE INFO

Article history:
Received 3 December 2013
Accepted 4 December 2013
Available online 1 January 2014

Presented by Haim Brezis

ABSTRACT

We study a porous medium equation with fractional potential pressure:

$$\partial_t u = \nabla \cdot \left(u^{m-1} \nabla p\right), \quad p = (-\Delta)^{-s} u,$$

for $m > 1$, $0 < s < 1$ and $u(x,t) \geqslant 0$. To be specific, the problem is posed for $x \in \mathbb{R}^N$, $N \geqslant 1$, and $t > 0$. The initial data $u(x,0)$ is assumed to be a bounded function with compact support or fast decay at infinity. We establish the existence of a class of weak solutions for which we determine whether, depending on the parameter m, the property of compact support is conserved in time or not, starting from the result of finite propagation known for $m = 2$. We find that when $m \in [1,2)$ the problem has infinite speed of propagation, while for $m \in [2,\infty)$ it has finite speed of propagation. Comparison is made with other nonlinear diffusion models where the results are widely different.

© 2013 Académie des sciences. Published by Elsevier Masson SAS. All rights reserved.

RÉSUMÉ

Nous étudions une équation du milieu poreux avec une pression potentielle fractionnaire: $\partial_t u = \nabla \cdot (u^{m-1} \nabla p)$, $p = (-\Delta)^{-s} u$, pour $m > 1$, $0 < s < 1$ et $u(x,t) \geqslant 0$. Le problème se pose pour $x \in \mathbb{R}^N$, $N \geqslant 1$ et $t > 0$. La donnée initiale est supposée bornée avec support compact ou décroissance rapide à l'infini. Lorsque le paramètre m est variable, on obtient deux comportements différents comme suit : si $m \in [1,2)$, le problème a une vitesse de propagation infinie, alors que pour $m \in [2,\infty)$, elle a une vitesse de propagation finie. On compare le résultat avec les comportements d'autres modèles de diffusion non linéaire, qui sont très différents.

© 2013 Académie des sciences. Published by Elsevier Masson SAS. All rights reserved.

Version française abrégée

Nous étudions un modèle de diffusion non linéaire avec pression non locale donné par :

$$\partial_t u = \nabla \cdot \left(u^{m-1} \nabla p\right), \quad p = \mathcal{K}(u), \tag{1}$$

E-mail addresses: diana.stan@uam.es (D. Stan), felix.delteso@uam.es (F. del Teso), juanluis.vazquez@uam.es (J.L. Vázquez).

1631-073X/$ – see front matter © 2013 Académie des sciences. Published by Elsevier Masson SAS. All rights reserved.
http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2013.12.003

pour $m > 1$ et $u(x,t) \geqslant 0$. Le problème est posé pour $x \in \mathbb{R}^N$, $N \geqslant 1$, et $t > 0$, et on se donne des conditions initiales :

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{2}$$

où $u_0 : \mathbb{R}^N \to [0,\infty)$ est bornée et à support compact ou à décroissance rapide à l'infini. La pression p est liée à u par un opérateur potentiel linéaire fractionnaire $p = \mathcal{K}(u)$, plus précisément $\mathcal{K} = (-\Delta)^{-s}$ à $0 < s < 1$, qui s'exprime par le noyau $K(x,y) = c|x-y|^{-(N-2s)}$ (c'est-à-dire un opérateur de Riesz).

Notre travail est motivé par deux travaux récents qui considèrent l'équation (1) pour $m = 2$. D'une part, Caffarelli et Vázquez étudient dans [4] le modèle de diffusion non linéaire de type milieu poreux avec des effets de diffusion non locaux :

$$\partial_t u = \nabla \cdot (u \nabla p), \quad p = (-\Delta)^{-s} u. \tag{CV}$$

L'etude est complétée dans les articles [5,6]. D'autre part, Head [12] a décrit la dynamique des dislocations dans les cristaux vues comme un continuum, et a proposé l'équation (1.1) avec $s = 1/2$, $m = 2$ si la dimension est $N = 1$. La densité de dislocations est de $u = v_x$, donc v résout le « problème intégré » :

$$v_t + |v_x|(-\partial_{xx})^{1-s} v = 0.$$

Le modèle a été récemment étudié sous cette forme par Biler, Karch et Monneau dans [3], où ils prouvent l'existence d'une unique solution de viscosité. Ils trouvent aussi une solution auto-similaire explicite, et ils décrivent le comportement asymptotique.

Notre note a pour but de mettre en clair la propriété de propagation finie pour les solutions du problème (1)–(2) en dependance du paramètre m. On sait déjà que cette propriété est valable pour $m = 2$. On prouve ici qu'elle est encore valable pour $m \in (2,\infty)$, tandis que pour $1 < m < 2$, les solutions non négatives de cette équation sont strictement positives pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t > 0$. Ce dernier résultat est prouvé rigoureusement en dimension $N = 1$ et sous des conditions sur les données initiales. Notons finalement que les cas $m = 1$ and $m = 2$ étaient connus.

Tous ces points seront développées dans l'article [17].

1. Introduction

We study a nonlinear diffusion model with nonlocal pressure given by

$$\partial_t u = \nabla \cdot \left(u^{m-1} \nabla p\right), \quad p = \mathcal{K}(u),$$

for $m > 1$ and $u(x,t) \geqslant 0$. The problem is posed for $x \in \mathbb{R}^N$, $N \geqslant 1$, and $t > 0$, and we give initial conditions

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

where $u_0 : \mathbb{R}^N \to [0,\infty)$ is bounded with compact support or fast decay at infinity.

The pressure p is related to u through a linear fractional potential operator $p = \mathcal{K}(u)$. To be specific, $\mathcal{K} = (-\Delta)^{-s}$ for $0 < s < 1$ with kernel $K(x,y) = c|x-y|^{-(N-2s)}$ (i.e. a Riesz operator). Moreover, $\mathcal{K}$ is a self-adjoint operator with $\mathcal{K} = \mathcal{H}^2$.

Our work is motivated by two recent works that consider Eq. (1) for $m = 2$. On the one hand, Caffarelli and Vázquez have studied (1) for $m = 2$ in [4] as a nonlinear diffusion equation of porous medium type with nonlocal diffusion effects:

$$\partial_t u = \nabla \cdot (u \nabla p), \quad p = (-\Delta)^{-s} u.$$

The study of this model has been pursued [5,6]. The properties of boundedness of the solutions, C^α regularity, existence of self-similar solutions and asymptotic behavior are established. The latter paper points out that the application to problems in particle systems with long-range interactions [11] leads to more general equations of the form $u_t = \nabla \cdot (f(u) \nabla \mathcal{K} g(u))$, with convenient monotone functions f and g, thus motivating the interest in our present model.

On the other hand, a similar model was proposed by Head [12] to describe the dynamics of dislocations in crystals seen as a continuum. When the space dimension is $N = 1$, the model becomes Eq. (1) $s = 1/2$ and $m = 2$. The dislocation density is $u = v_x$, therefore v solves the "integrated problem":

$$v_t + |v_x|(-\partial_{xx})^{1-s} v = 0.$$

The model in this form has been recently studied by Biler, Karch and Monneau in [3], where they prove existence of a unique viscosity solution.

2. Main results

We first propose a definition of the solution and establish the existence and main properties of the solutions.

Download English Version:

https://daneshyari.com/en/article/4670036

Download Persian Version:

https://daneshyari.com/article/4670036

Daneshyari.com