C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 351 (2013) 13–18

Contents lists available at SciVerse ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Mathematical Analysis/Harmonic Analysis

Lower bounds for operators on graded Lie groups

Opérateurs bornés inférieurement sur les groupes de Lie gradués

Véronique Fischer [a], Michael Ruzhansky [b]

[a] *Universita degli studi di Padova, DMMMSA, Via Trieste 63, 35121 Padova, Italy*
[b] *Department of Mathematics, Imperial College London, 180 Queen's Gate, London SW7 2AZ, United Kingdom*

ARTICLE INFO

Article history:
Received 2 August 2012
Accepted after revision 10 January 2013
Available online 23 January 2013

Presented by the Editorial Board

ABSTRACT

In this note we present a symbolic pseudo-differential calculus on any graded (nilpotent) Lie group and, as an application, a version of the sharp Gårding inequality. As a corollary, we obtain lower bounds for positive Rockland operators with variable coefficients as well as their Schwartz-hypoellipticity.

RÉSUMÉ

Dans cette note nous présentons un calcul pseudo-différentiel symbolique sur tous les groupes de Lie (nilpotents) gradués et, comme application, une version de l'inégalité de Gårding. En découlent des bornes inférieures pour des opérateurs de Rockland positifs à coefficients variables ainsi que leur hypo-ellipticité Schwartz.

Version française abrégée

Dans cette note nous présentons un calcul pseudo-différentiel sur les groupes de Lie gradués. Comme application, nous obtenons une inégalité de Gårding avec gain d'une dérivée ainsi que l'hypo-ellipticité de Schwartz pour des opérateurs dans ce contexte.

Nous noterons G le groupe gradué. Par définition, le groupe de Lie G est connexe et simplement connexe et son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ admet une graduation $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\ell=1}^{\infty} \mathfrak{g}_\ell$ satisfaisant $[\mathfrak{g}_\ell, \mathfrak{g}_{\ell'}] \subset \mathfrak{g}_{\ell+\ell'}$ pour tout $\ell, \ell' \in \mathbb{N}$, où les $\mathfrak{g}_\ell$, $\ell = 1, 2 \ldots$, sont des sous-espaces vectoriels de $\mathfrak{g}$ presque tous égaux à zéro. Cela implique que le groupe G est nilpotent.

Soient $\{X_1, \ldots, X_{n_1}\}$ une base de $\mathfrak{g}_1$, $\{X_{n_1+1}, \ldots, X_{n_1+n_2}\}$ une base de $\mathfrak{g}_2$, et ainsi de suite jusque'à produire une base $X_1, \ldots, X_n$ de $\mathfrak{g}$. Grâce à l'application exponentielle, cela permet d'identifier les éléments $(x_1, \ldots, x_s)$ de $\mathbb{R}^n$ avec ceux $x = \exp(x_1 X_1 + \cdots + x_n X_n)$ du groupe G. Nous notons dx la mesure de Haar correspondante sur G. Nous définissons aussi les espaces de fonctions de Schwartz $\mathcal{S}(G)$ et des distributions tempérées $\mathcal{S}'(G)$ comme ceux de $\mathfrak{g}$. On note x_j la fonction $x = (x_1, \ldots, x_n) \in G \mapsto x_j \in \mathbb{R}$. Plus généralement, on définit $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$ pour tout multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}$. De la même façon, nous posons $X^\alpha = X_1^{\alpha_1} \ldots X_n^{\alpha_n}$ dans l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$.

Pour tout $r > 0$, nous définissons l'application linéaire $D_r : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ par $D_r X = r^\ell X$ pour tout $X \in \mathfrak{g}_\ell$, $\ell \in \mathbb{N}$. Ainsi, on a équipé l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de la famille de dilatations $\{D_r, r > 0\}$ et $\mathfrak{g}$ devient une algèbre de Lie homogène au sens de [7]. Les poids de ces dilatations sont les entiers $\upsilon_1, \ldots, \upsilon_n$ donnés par $D_r X_j = r^{\upsilon_j} X_j$, $j = 1, \ldots, n$. Les dilatations de groupe associées sont définis par $r \cdot x := (r^{\upsilon_1} x_1, r^{\upsilon_2} x_2, \ldots, r^{\upsilon_n} x_n)$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in G$, $r > 0$. De manière canonique, cela conduit à

E-mail addresses: fischer@dmsa.unipd.it (V. Fischer), m.ruzhansky@imperial.ac.uk (M. Ruzhansky).

1631-073X/$ – see front matter
http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2013.01.004

la notion d'homogénéité pour les fonctions et les opérateurs de G. Par exemple, le degré d'homogénéité de x^α et X^α, vus comme une fonction et un opérateur du groupe respectivement, est $[\alpha]=\sum_{j=1}^n \upsilon_j\alpha_j$. Rappelons en effet qu'un vecteur de $\mathfrak{g}$ définit un champ de vecteur invariant à gauche sur G et que, plus généralement, l'algèbre envelopante de $\mathfrak{g}$ est isomorphe à l'algèbre des opérateurs différentiels invariants à gauche. Nous conservons la même notation pour les vecteurs et les opérateurs correspondants.

La dimension du groupe G est $n=\sum_\ell n_\ell$ alors que sa dimension homogène est $Q=\sum_\ell \ell n_\ell=\upsilon_1+\cdots+\upsilon_n$.

On note $\widehat{G}$ l'ensemble des classes d'équivalence des représentations (continues) irréductibles et unitaires du groupe G et μ sa mesure de Plancherel. Nous nous autorisons à identifier une classe d'équivalence avec l'un de ses éléments. De plus, nous conservons la même notation pour la représentation infinitésimale correspondante. L'espace de la representation π est désigné par $\mathcal{H}_\pi$ et le sous-espace des vecteurs C^∞ par $\mathcal{H}_\pi^\infty$.

Nous fixons un opérateur de Rockland positif $\mathcal{R}$ sur G (cf. [7]). Un tel opérateur existe toujours et nous notons ν son degré d'homogénéité. En fait, les classes d'opérateurs que nous définissons ici ne dépendent pas du choix de $\mathcal{R}$.

Nous définissons maintenant les symboles auxquels nous associons un opérateur sur G (quantification). Ensuite, nous définissons les opérateurs de différence et, enfin, les classes de symboles qui conduisent au calcul pseudo-différentiel annoncé.

Définition 0.1. Un *symbole* $\sigma=\{\sigma(x,\pi)\colon\ x\in G,\pi\in\widehat{G}\}$ est une famille d'opérateurs telle que

1. pour tout $x\in G$, la famille $\{\sigma(x,\pi),\pi\in\hat{G}\}$ est un champ d'opérateurs $\mathcal{H}_\pi^\infty\to\mathcal{H}_\pi$ qui est μ-mesurable ;
2. il existe $\gamma_1,\gamma_2\in\mathbb{R}$ tels que pour tout $x\in G$, les opérateurs $\pi(I+\mathcal{R})^{\gamma_1}\sigma(x,\pi)\pi(I+\mathcal{R})^{\gamma_2}$ sont bornés sur $\mathcal{H}_\pi$ uniformément dans $\pi\in\hat{G}$;
3. pour tout $\pi\in\widehat{G}$ et $u,v\in\mathcal{H}_\pi$, la fonction $G\ni x\mapsto(\sigma(x,\pi)u,v)_{\mathcal{H}_\pi}\in\mathbb{C}$ est C^∞ sur G.

Ici, les opérateurs $\pi(I+\mathcal{R})^\gamma$ sont définis par le théorème spectral pour $\pi(\mathcal{R})$. L'existence de γ_1,γ_2 dans la seconde condition garantit que la formule suivante a un sens : $Tf(x)=\int_{\widehat{G}}\operatorname{trace}(\pi(x)\sigma(x,\pi)\widehat{f}(\pi))\,d\mu(\pi)$, $f\in\mathcal{S}(G)$, $x\in G$; de plus, l'opérateur $T=\operatorname{Op}(\sigma)$ est bien défini et continu $\mathcal{S}(G)\to\mathcal{S}'(G)$. Nous remarquons que, si l'opérateur T est invariant à gauche, alors le symbole est indépendant de x.

Définition 0.2. Les *opérateurs de différence* Δ^α, $\alpha\in\mathbb{N}_0^n$ sont densément définis sur l'algèbre C^* du groupe G via :

$$\big(\Delta^\alpha\widehat{f}\big)(\pi):=\widehat{\big(x^\alpha f\big)}(\pi),\quad f\in\mathcal{S}(G).$$

Soient $m\in\mathbb{R}$ et $\rho,\delta\in\mathbb{R}$ tels que $0\leqslant\delta\leqslant\rho\leqslant 1$, $\delta\neq 1$.

Définition 0.3. La *classe de symboles* $S^m_{\rho,\delta}$ est définie comme l'ensemble des symboles σ satisfaisant, pour tout $\alpha,\beta\in\mathbb{N}_0^n$ et $\gamma\in\mathbb{R}$:

$$\sup_{x\in G,\pi\in\widehat{G}}\big\|\pi(I+\mathcal{R})^{\frac{\rho[\alpha]-m-\delta[\beta]+\gamma}{\nu}}X_x^\beta\Delta^\alpha\sigma(x,\pi)\pi(I+\mathcal{R})^{-\frac{\gamma}{\nu}}\big\|_{op}<\infty. \tag{1}$$

(Le supremum sur π est en fait le supremum essentiel par rapport à la mesure de Plancherel μ.)

Il est facile de voir que si $m_1\leqslant m_2$, $\delta_1\leqslant\delta_2$ et $\rho_1\geqslant\rho_2$, alors $S^{m_1}_{\rho_1,\delta_1}\subset S^{m_2}_{\rho_2,\delta_2}$. De plus, les expressions (1) conduisent à une topologie de Fréchet sur l'espace vectoriel $S^m_{\rho,\delta}$.

Dans le cas abélien, c'est-à-dire $\mathbb{R}^n$ équipé de la loi additive et $\mathcal{R}=-\mathcal{L}$, $\mathcal{L}$ l'opérateur de Laplace, $S^m_{\rho,\delta}$, coïncide avec la classe de symboles de Hörmander sur $\mathbb{R}^n$. Cependant, notre motivation initale ne provient pas du cas abélien : nous voulions définir des opérateurs de différence et des classes de symboles analogues à ceux définis dans [12] sur les groupes de Lie compacts. Dans ce cas-ci, une définition similaire à (1) donnerait formellement les même classes de symboles que [12], car l'opérateur $\pi(I+\mathcal{R})$ est scalaire, $\mathcal{R}$ ayant été choisi comme $\mathcal{R}=-\mathcal{L}$, où $\mathcal{L}$ est l'opérateur de Laplace–Beltrami. Dans notre cas, celui de G groupe gradué non abélien, l'opérateur $\mathcal{R}$ n'est même pas central et nous avons introduit γ dans (1) afin que $\bigcup_{m\in\mathbb{R}}S^m_{\rho,\delta}$ devienne une algèbre (cf. (1) dans le Théorème 0.4).

Nous avons obtenu les propriétés suivantes pour les classes d'opérateurs $\Psi^m_{\rho,\delta}:=\operatorname{Op}(S^m_{\rho,\delta})$ définies grâce à la procédure de quantification $\sigma\mapsto\operatorname{Op}(\sigma)$ décrite ci-dessus.

Théorème 0.4. *Soient* $0\leqslant\delta\leqslant\rho\leqslant 1$ *avec* $\rho\neq 0$ *et* $\delta\neq 1$. *Nous avons les propriétés suivantes :*

(1) *La classe de symboles* $\bigcup_{m\in\mathbb{R}}S^m_{\rho,\delta}$ *est une algèbre d'opérateurs stable par l'application adjointe. Chaque espace vectoriel* $S^m_{\rho,\delta}$ *ne dépend pas du choix de l'opérateur de Rockland positif* $\mathcal{R}$.
(2) *Pour* $\rho\neq 0$, *la classe d'opérateurs* $\bigcup_{m\in\mathbb{R}}\Psi^m_{\rho,\delta}$ *est une algèbre d'opérateurs stable par l'application adjointe.*
(3) *Pour tout* $\alpha\in\mathbb{N}_0^n$, *on a* $X^\alpha\in\Psi^{[\alpha]}_{1,0}$.
(4) $(1+\mathcal{R})^{\frac{m}{\nu}}\in\Psi^m_{1,0}$.
(5) *Si* $\rho\in[0,1)$, *alors les opérateurs dans* $\Psi^0_{\rho,\rho}$ *sont continus sur* $L^2(G)$.