C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 351 (2013) 37–42

Contents lists available at SciVerse ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Partial Differential Equations

Multiple symmetric solutions for a Neumann problem with lack of compactness

Solutions symétriques multiples pour un problème de Neumann sans compacité

Giovanni Molica Bisci [a], Vicenţiu Rădulescu [b,c]

[a] *Dipartimento MECMAT, University of Reggio Calabria, Via Graziella, Feo di Vito, 89124 Reggio Calabria, Italy*
[b] *Institute of Mathematics "Simion Stoilow" of the Romanian Academy, 014700 Bucharest, Romania*
[c] *Department of Mathematics, University of Craiova, Street A.I. Cuza No. 13, 200585 Craiova, Romania*

ARTICLE INFO

Article history:
Received 12 November 2012
Accepted 5 December 2012
Available online 5 January 2013

Presented by Philippe G. Ciarlet

ABSTRACT

The existence of multiple cylindrically symmetric solutions for a class of non-autonomous elliptic Neumann problems in a strip-like domain of the Euclidean space is investigated. The proof combines a recent compactness result and the Palais symmetric critically principle. A concrete application illustrates the main abstract result of this Note.
© 2012 Académie des sciences. Published by Elsevier Masson SAS. All rights reserved.

RÉSUMÉ

On étudie l'existence de solutions multiples à symétrie cylindrique pour une classe de problèmes elliptiques non autonomes de Neumann sans compacité. La preuve combine un résultat récent de compacité et le principe de Palais de symétrique critique. Une application met en évidence le résultat principal de cette Note.
© 2012 Académie des sciences. Published by Elsevier Masson SAS. All rights reserved.

Version française abrégée

Soit $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^m$ un domaine borné et régulier et soit le cylindre $\Omega := \mathcal{O} \times \mathbb{R}^n$. On considère l'espace des fonctions à symétrie cylindrique défini par

$$W_c^{1,p}(\Omega) := \left\{u \in W^{1,p}(\Omega)\colon\ u(x,\cdot) \text{ a symétrie radiale, pour tout } x \in \mathcal{O}\right\}.$$

Dans cette Note on étudie le problème non linéaire

$$\begin{cases} -\Delta_p u + |u|^{p-2}u = \lambda\alpha(x,y)f(u) & \text{dans } \Omega \\ \partial u/\partial\nu = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{P}$$

où $\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est une fonction continue, ν est la normale extérieure à $\partial\Omega$ et $p > m+n$. On suppose que $\alpha \in L^1(\Omega)$ est une fonction non négative à symétrie cylindrique telle que, pour un certain $\tau > 0$,

$$\operatorname{essinf}_{(x,y)\in\mathcal{O}\times B_n(0,\tau/2)} \alpha(x,y) > 0.$$

E-mail addresses: gmolica@unirc.it (G. Molica Bisci), vicentiu.radulescu@math.cnrs.fr (V. Rădulescu).
URL: http://www.inf.ucv.ro/~radulescu (V. Rădulescu).

1631-073X/$ – see front matter © 2012 Académie des sciences. Published by Elsevier Masson SAS. All rights reserved.
http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2012.12.001

Soit $B_{(1/2,1)}(n, p+1) := \int_{1/2}^{1} t^{n-1}(1-t)^p \,\mathrm{d}t$. On définit

$$\sigma(n,p) := 2^{p-n}\big(2^n - 1\big); \qquad g(p,N) := \frac{1 + 2^{n+p} N B_{(1/2,1)}(n,p+1)}{2^n}; \qquad \omega_\tau^{(n)} := \tau^n \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(1+\frac{n}{2})},$$

et

$$\kappa := \frac{\tau}{(\omega_\tau^{(n)} |\mathcal{O}|_m (\sigma(n,p) + \tau^p g(p,n)))^{1/p} C_p}.$$

Soit $\|\alpha\|_{(\mathcal{O},\tau/2)} := \int_{\mathcal{O}\times B_n(0,\tau/2)} \alpha(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Le résultat principal de cette Note est le suivant :

Théorème 0.1. *Supposons qu'il existe δ et γ avec $\delta > \kappa\gamma > 0$ et tels que les propriétés suivantes soient satisfaites :*

(h$_0$) $F(\xi) := \int_0^\xi f(s)\,\mathrm{d}s \geqslant 0$, *pour tout* $\xi \in [0,\delta]$;
(h$_1$) *si*

$$\tilde{\kappa} := \frac{\kappa^p \|\alpha\|_{(\mathcal{O},\tau/2)}}{\|\alpha\|_{L^1}},$$

alors

$$\frac{\max_{|\xi|\leqslant\gamma} F(\xi)}{\gamma^p} < \tilde{\kappa} \frac{F(\delta)}{\delta^p};$$

(h$_2$) *il existe $c_0 > 0$ et $0 < s < p-1$ tels que pour tout $t \in \mathbb{R}$,*

$$\big|f(t)\big| \leqslant c_0\big(1 + |t|^s\big).$$

Alors, pour tout λ dans l'intervalle

$$\Lambda_{(\gamma,\delta)} := \left]\frac{\delta^p}{p\kappa^p C_p^p \|\alpha\|_{(\mathcal{O},\tau/2)} F(\delta)}, \frac{\gamma^p}{pC_p^p \|\alpha\|_{L^1} \max_{|\xi|\leqslant\gamma} F(\xi)}\right[,$$

le problème (P) admet au moins trois solutions faibles à symétrie cylindrique.

1. Introduction

Let $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^m$ be a bounded domain with smooth boundary and set $\Omega := \mathcal{O} \times \mathbb{R}^n$. Define the space of cylindrically symmetric functions by

$$W_c^{1,p}(\Omega) := \big\{u \in W^{1,p}(\Omega)\colon\ u(x,\cdot) \text{ is radially symmetric for all } x \in \mathcal{O}\big\}.$$

The aim of this Note is to establish the existence of multiple cylindrically symmetric weak solutions for the following non-autonomous elliptic Neumann problem:

$$\begin{cases} -\Delta_p u + |u|^{p-2}u = \lambda\alpha(x,y) f(u) & \text{in } \Omega \\ \partial u/\partial\nu = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{P}$$

Here ν denotes the outward unit normal to $\partial\Omega$, $p > m+n$ is a real number, and $\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$. We assume that $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a continuous function, α is a nonnegative cylindrically symmetric function, and λ is a positive real parameter.

In the present Note, just requiring a suitable oscillating behaviour of the potential $F(\xi) := \int_0^\xi f(t)\,\mathrm{d}t$, we are able to find a precise interval of values of the parameter λ for which problem (P) admits at least three cylindrically symmetric weak solutions.

Assume $\alpha \in L^1(\Omega)$ is a nonnegative cylindrically symmetric function such that for some $\tau > 0$,

$$\operatorname{essinf}_{(x,y)\in\mathcal{O}\times B_n(0,\tau/2)} \alpha(x,y) > 0, \tag{1}$$

where $B_n(0,\tau/2)$ denotes the open ball in $\mathbb{R}^n$ centred in zero and radius $\tau/2$.

We say that $u \in W^{1,p}(\Omega)$ is a weak solution of problem (P) if for all $v \in W^{1,p}(\Omega)$,

$$\int_\Omega \big|\nabla u(x,y)\big|^{p-2} \nabla u(x,y)\cdot\nabla v(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_\Omega \big|u(x,y)\big|^{p-2} u(x,y) v(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$= \lambda \int_\Omega \alpha(x,y) f\big(u(x,y)\big) v(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Download English Version:

https://daneshyari.com/en/article/4670057

Download Persian Version:

https://daneshyari.com/article/4670057

Daneshyari.com