C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 351 (2013) 63–67

Contents lists available at SciVerse ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Algebraic Geometry

A remark on the Abel–Jacobi morphism for the cubic threefold ☆

Ze Xu

Academy of Mathematics and Systems Science, Institute of Mathematics, Chinese Academy of Sciences, No. 55 East Zhongguancun Road, 100190, Beijing, China

ARTICLE INFO

Article history:
Received 25 November 2012
Accepted 6 December 2012
Available online 23 January 2013

Presented by Claire Voisin

ABSTRACT

Let X be a smooth cubic threefold and $J(X)$ be its intermediate Jacobian. We show that there exists a codimension 2 cycle Z on $J(X)\times X$ with Z_t homologically trivial for each $t\in J(X)$, such that the morphism $\phi_Z: J(X)\to J(X)$ induced by the Abel–Jacobi map is the identity. This answers positively a question of Voisin in the case of the cubic threefold.

Version française abrégée

Soit X une variété projective lisse sur $\mathbb{C}$. On a le résultat suivant, obtenu en combinant des résultats de Bloch–Ogus [2], Bloch–Srinivas [3], Merkurjev–Suslin [11] et Murre [12] :

Théorème 0.1. *(Voir [12].) Si $CH_0(X)$ est supporté sur une courbe, on a $CH^2(X)_{\mathrm{hom}}=CH^2(X)_{\mathrm{alg}}$ et l'application d'Abel–Jacobi induit un isomorphisme de groupes*

$$AJ_X: CH^2(X)_{\mathrm{hom}}\to J(X):=H^3(X,\mathbb{C})/\big(F^2H^3(X)\oplus H^3(X,\mathbb{Z})\big).$$

Dans cette Note, nous considérons le cas où X est une variété projective de dimension 3 rationnellement connexe. On a alors $CH_0(X)=\mathbb{Z}$ et $CH^2(X)=CH_1(X)$.

Le morphisme AJ_X est algébrique dans un sens à préciser, car $J(X)$ est une variété algébrique mais $CH_1(X)_{\mathrm{hom}}$ est seulement une limite inductive de quotients de variétés algébriques par une relation d'équivalence. L'algébricité du morphisme AJ_X signifie par définition que pour toute variété projective lisse Y et tout cycle Z de codimension 2 sur $Y\times X$ tel que $Z_y\in CH^2(X)_{\mathrm{hom}}$ pour tout $y\in Y$, le morphisme induit

$$\phi_Z: Y\to J(X),\qquad \phi_Z(y)=AJ_X(Z_y)$$

est un morphisme de variétés algébriques, qui sera appelé *le morphisme d'Abel–Jacobi*.

Une observation importante faite par Voisin est le fait qu'il existe, malgré la similarité entre le Théorème 0.1 et le théorème d'Abel, des différences substantielles entre les 1-cycles sur les variétés de dimension 3 avec petit CH_0 et les 0-cycles sur les courbes.

Les deux questions suivantes sont posées dans [13] :

Question 0.2. Soit X une variété porojective lisse de dimension 3 telle que $AJ_X: CH_1(X)_{\mathrm{alg}}\to J(X)$ est surjective. Existe-t-il un cycle Z universel de codimension 2 cycle on $J(X)\times X$, tel que $Z_t\in CH^2(X)_{\mathrm{hom}}$ pour tout $t\in J(X)$ et que le morphisme d'Abel–Jacobi

☆ This work was performed when the author was visiting Institut de Mathématiques de Jussieu.

E-mail address: zexu2010@gmail.com.

1631-073X/$ – see front matter
http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2012.12.002

$$\phi_Z : J(X) \to J(X), \qquad \phi_Z(t) = AJ_X(Z_t)$$

soit l'identité ?

Voisin remarque que la Question 0.2 a une réponse positive si la conjecture de Hodge est satisfaite pour les classes de Hodge *entières* de degré 4 sur $J(X) \times X$.

Question 0.3. Pour quelles variétés projectives lisses X de dimension 3 la propriété suivante est-elle satisfaite ?
Il existe une variété projective lisse Y et un cycle Z de codimension 2 sur $Y \times X$ tel que $Z_y \in CH^2(X)_{\text{hom}}$ pour tout $y \in Y$, et que le morphism d'Abel–Jacobi $\phi_Z : Y \to J(X)$ soit surjectif à fibre générale rationnellement connexe.

On sait que la Question 0.3 a une réponse positive pour les cubiques lisses de dimension 3 [9,10] et les intersections complètes lisses de deux quadriques dans $\mathbb{P}^5$ [4]. Il est montré dans [13] que si la Question 0.3 a une réponse positive pour X et la jacobienne intermédiaire $J(X)$ admet un 1-cycle Γ tel que $\Gamma^{*g} = g!J(X)$ dans $CH_g(J(X)) = \mathbb{Z}$, où $g := \dim J(X)$, alors la Question 0.2 admet aussi une réponse positive pour X. En particulier, si la jacobienne intermédiaire de X est isomorphe à la jacobienne d'une courbe, alors la Question 0.2 a une réponse positive pour X si la Question 0.3 a une réponse positive pour X. Par exemple, la Question 0.2 a une réponse positive pour les intersections complètes lisses de deux quadriques dans $\mathbb{P}^5$.

Nous donnons dans cette Note une réponse positive à la Question 0.2 pour les cubiques lisses de dimension 3. Pour les propriétés de la jacobienne intermédiaire des cubiques de dimension 3, nous renvoyons à [5] :

Théorème 0.4. *Soit X une cubique lisse de dimension 3. Il existe un cycle Z de codimension 2 sur $J(X) \times X$ avec $Z_t \in CH^2(X)_{\text{hom}}$ pour tout $t \in J(X)$, tel que le morphisme d'Abel–Jacobi induit $\phi_Z : J(X) \to J(X)$ soit l'identité.*

Nous utilisons pour cela une condition suffisante pour qu'un ouvert de l'espace des faisceaux stables sur une variété projective lisse X soit fin.

Pour une telle X, le groupe de Grothendieck modulo équivalence numérique $K_{\text{num}}(X)$ est défini comme $K(X)/\equiv$, où deux classes x et y de $K(X)$ sont dites numériquement équivalentes (notation $x \equiv y$), si la différence $x - y$ appartient au radical de la forme quadratique

$$(a, b) \longmapsto \chi(a \cdot b) = \int_X \mathrm{ch}(a)\mathrm{ch}(b)t\,\mathrm{d}(X)$$

(cf. [7]). Fixons une classe $c \in K_{\text{num}}(X)$. Soit P le polynôme de Hilbert associé à c, M^s l'espace de modules des faisceaux stables sur X de polynôme de Hilbert P, et $M(c)^s \subset M^s$ le sous-ensemble localement fermé paramétrant les faisceaux stables de classe numerique c.

Théorème 0.5. *(Voir [8, Th. 4.6.5].) Si le PGCD de tous les nombres $\chi(c \cdot \mathcal{F})$, où $\mathcal{F}$ parcourt une certaine collection des faisceaux cohérents sur X, est égal à 1, il existe un faisceau universel sur $M(c)^s \times X$.*

Théorème 0.6. *Soit X une cubique lisse de dimension 3. Alors l'espace de modules $M_X^s(2; 0, 2)$ des faisceaux stables de rang 2 sur X de nombres de Chern $c_1 = 0$, $c_2 = 2$, $c_3 = 0$ est fin (c'est-à-dire qu'il existe un faisceau universel sur $M_X^s(2; 0, 2) \times X$).*

Démonstration. Soit c la classe numérique d'un faisceau stable localement libre $\mathcal{E}$ de rang 2 on X. Rappelons que $\mathrm{Pic}(X) = \mathbb{Z} \cdot h$, où h est la classe d'une section hyperplane de X. Le groupe $A_1(X)$ des 1-cycles de X modulo équivalence algébrique est égal à $\mathbb{Z} \cdot l$, où l est la classe d'une droite de X. Notons que $h^2 \equiv 3l$. Comme X est une variété de Fano, $CH_0(X) = \mathbb{Z} \cdot pt$. On a $\mathrm{ch}(c) \equiv \mathrm{ch}(\mathcal{E}) = 2 - 2l$. Comme $c_1(\mathcal{T}_X) = 2h$ et $c_2(\mathcal{T}_X) = 12l$, on a $t\,\mathrm{d}(X) = 1 + h + 2l + pt$. On voit facilement que $\mathrm{ch}(\mathcal{O}_X(1)) = 1 + h + \frac{3}{2}l$. On trouve alors que $\chi(c \cdot \mathcal{E}) = -4$ et

$$\begin{aligned}\chi\big(c \cdot \mathcal{O}_X(1)\big) &= \int_X \mathrm{ch(c)} \cdot \mathrm{ch}(\mathcal{O}_X) \cdot t\,\mathrm{d}(X) \\ &= \int_X (2 - 2l) \cdot \left(1 + h + \frac{3}{2}l\right) \cdot (1 + h + 2l + pt) = 5.\end{aligned}$$

Clairement, le PGCD de $\chi(c \cdot \mathcal{E})$ et $\chi(c \cdot \mathcal{O}_X(1))$ est égal à 1. Le Théorème 0.5 entraîne donc qu'il existe un faisceau universel sur $M_X^s(2; 0, 2) \times X$.