C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 351 (2013) 657–661

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Group theory

Locally normal subgroups of simple locally compact groups

Sous-groupes localement normaux des groupes localement compacts simples

Pierre-Emmanuel Caprace [a,1], Colin D. Reid [b,2], George A. Willis [b,3]

[a] *Université catholique de Louvain, IRMP, chemin du Cyclotron, 2, bte L7.01.02, B-1348 Louvain-la-Neuve, Belgium*
[b] *Department of Mathematics, University of Newcastle, Callaghan, NSW 2308, Australia*

ARTICLE INFO

Article history:
Received 26 February 2013
Accepted after revision 17 September 2013
Available online 15 October 2013

Presented by the Editorial Board

ABSTRACT

We announce various results concerning the structure of compactly generated simple locally compact groups. We introduce a local invariant, called the **structure lattice**, which consists of commensurability classes of compact subgroups with open normaliser, and show that its properties reflect the global structure of the ambient group.

RÉSUMÉ

On annonce divers résultats concernant la structure de groupes localement compacts, simples et compactement engendrés. Un invariant local de ces groupes, appelé **treillis structurel**, est introduit ; il consiste en des classes de commensurabilité de sous-groupes compacts à normalisateur ouvert. Les propriétés de ce treillis refètent la structure globale du groupe ambiant.

© 2013 Académie des sciences. Published by Elsevier Masson SAS. All rights reserved.

Version française abrégée

Le but de cette note est d'introduire de nouveaux outils destinés à l'étude de la classe $\mathscr{S}$ des groupes localement compacts, totalement discontinus, compactement engendrés, non discrets et topologiquement simples. Nous introduisons des invariants de nature locale associés à un élément $G \in \mathscr{S}$, et montrons que leurs propriétés refètent la structure globale de G. Le premier de ces invariants est appelé **treillis structurel** d'un groupe $G \in \mathscr{S}$, noté $\mathcal{LN}(G)$. Il est constitué des classes de commensurabilité de **sous-groupes localement normaux compacts**, c'est-à-dire de sous-groupes compacts à normaliseur ouvert dans G. Comme les sous-groupes non compacts à normalisateur ouvert ne jouent aucun rôle dans notre discussion, on parlera simplement de *sous-groupe localement normal*, en omettant le qualificatif *compact*, par souci de brièveté. On vérifie que $\mathcal{LN}(G)$, muni de la relation d'ordre partiel induite par l'inclusion de sous-groupes localement normaux, forme un treillis modulaire. C'est un objet local, au sens où tout voisinage de l'identité dans G détermine entièrement $\mathcal{LN}(G)$. Ce treillis possède un unique minimum global 0, correspondant à la classe du sous-groupe trivial, et un unique maximum global ∞, correspondant à celle des sous-groupes compacts ouverts. On a $\mathcal{LN}(G) = \{0, \infty\}$ si et seulement si chaque sous-groupe

E-mail addresses: pe.caprace@uclouvain.be (P.-E. Caprace), Colin.Reid@newcastle.edu.au (C.D. Reid), George.Willis@newcastle.edu.au (G.A. Willis).
[1] F.R.S.-FNRS research associate, supported in part by the ERC (grant #278469).
[2] Supported in part by ARC Discovery Project DP120100996.
[3] Supported in part by ARC Discovery Project DP0984342.

1631-073X/$ – see front matter
http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2013.09.010

compact ouvert de G est héréditairement juste-infini. C'est en particulier le cas lorsque G est un groupe algébrique simple sur un corps local ; en revanche, le treillis structurel de la plupart des autres exemples connus de groupes dans $\mathscr{S}$ contient des éléments non triviaux.

Notre premier résultat (Théorème 1 ci-dessous) décrit la structure algébrique des sous-groupes localement normaux : ce sont tous des groupes virtuellement pro-η pour un ensemble fini de premiers $\eta = \eta(G)$. En outre, un sous-groupe localement normal non trivial n'est jamais virtuellement résoluble, et ne peut pas être virtuellement pro-π si π est un sous-ensemble strict de η.

On étudie ensuite l'action canonique de G sur le treillis structurel, induite par la conjugaison. Un point fixe de G dans $\mathcal{LN}(G)$ correspond donc à un sous-groupe localement normal commensuré par G. On montre, en fait, que toute classe de commensurabilité de sous-groupes compacts de G commensurés par G possède un représentant localement normal, de sorte que l'ensemble des points fixes $\mathcal{LN}(G)^G$ correspond exactement aux sous-groupes compacts commensurés. Notre deuxième résultat (Théorème 2 ci-dessous) montre notamment que toute G-orbite dans le treillis structurel contient des sous-ensembles finis dont le suprémum est fixé par G. Toutefois, on s'attend à ce que l'ensemble des points fixes $\mathcal{LN}(G)^G$ de G soit restreint : en effet, $\mathcal{LN}(G)^G$ est réduit à $\{0, \infty\}$ dès que G est abstraitement simple.

La dynamique de l'action de G sur le treillis structurel devient particulièrement riche lorsque G contient deux sous-groupes localement normaux qui commutent. Pour formaliser cette situation, on introduit un autre treillis, noté $\mathcal{LC}(G)$ et appelé **treillis des centralisateurs**, dont les éléments non triviaux sont les classes de commensurabilité des sous-groupes localement normaux dont le centralisateur dans G n'est pas réduit au neutre. On montre que $\mathcal{LC}(G)$ est canoniquement muni d'une structure de treillis booléen (Théorème 3 ci-dessous). D'après le théorème de Stone, ce treillis est donc canoniquement isomorphe au treillis des parties compactes ouvertes d'un espace compact totalement discontinu, qu'on notera $\Omega = \Omega(G)$. L'action de G sur $\mathcal{LC}(G)$ induit une G-action continue par homéomorphismes sur Ω. L'espace Ω est réduit à un singleton si et seulement si $\mathcal{LC}(G) = \{0, \infty\}$. Dès que ce n'est pas le cas, on montre (Théorème 4 ci-dessous) que la G-action sur Ω est fidèle, minimale (toutes les orbites sont denses), et fortement proximale (c'est-à-dire que l'adhérence de la G-orbite d'une mesure de probabilité quelconque sur Ω contient des mesures de Dirac). En particulier, Ω ne porte aucune mesure de probabilité G-invariante, ce qui empêche dès lors G d'être moyennable. Ceci suggère que les exemples récents de groupes infinis simples moyennables de type fini de [3] ne possèdent probablement pas d'analogues parmi les groupes non discrets.

On introduit enfin un troisième treillis, noté $\mathcal{LD}(G)$ et appelé **treillis de décomposition**. Il est constitué des classes de commensurabilité des facteurs directs des sous-groupes compacts ouverts de G. Le treillis de décomposition est un sous-treillis du treillis structurel et du treillis des centralisateurs ; c'est lui-même un treillis booléen. On montre que, si $\mathcal{LD}(G) \neq \{0, \infty\}$, (c'est-à-dire s'il existe un sous-groupe compact ouvert qui se scinde en produit direct), alors G est abstraitement simple (Théorème 10 ci-dessous).

Nos résultats suggèrent une partition de la classe $\mathscr{S}$ en cinq familles disjointes, correspondant à des comportements distincts des treillis introduits ici (Théorème 11 ci-dessous). Les exemples connus de groupes dans $\mathscr{S}$ se répartissent en fait dans seulement quatre de ces familles, et il n'est pas clair que la cinquième, constituée des groupes dits **de type atomique**, soit effectivement non vide. Cette dernière famille correspond au cas où le treillis structurel est non trivial, mais fixé ponctuellement par tout élément de G. Dans ce cas, le groupe G ne peut pas être abstraitement simple.

1. Introduction

This note concerns the class of compactly generated locally compact groups that are topologically simple and non-discrete. Since the connected component of the identity is always a closed normal subgroup in any topological group, the members of that class are either connected or totally disconnected. The connected ones are known to coincide with the simple Lie groups, as a consequence of the solution to the Hilbert fifth problem. We shall therefore concentrate on the totally disconnected ones. For the sake of brevity, we denote by $\mathscr{S}$ the class of compactly generated locally compact groups that are totally disconnected, topologically simple, and non-discrete.

Our goal is to present new tools to investigate the structure of members of $\mathscr{S}$. Although these tools are of *local* nature, i.e. depend only on arbitrarily small identity neighbourhoods, they interact with the global structure of the ambient group. The present study was inspired by earlier work due to J. Wilson [4] on just-infinite groups, and work by Barnea, Ershov and Weigel [1] on abstract commensurators of profinite groups. Further considerations and detailed proofs will appear in a series of papers, see [2].

2. Locally normal subgroups

The central concept in our considerations is that of a **locally normal subgroup**, which is defined as a closed subgroup whose normaliser is open. Since we focus on the local structure, we shall only need to consider locally normal subgroups that are compact; we therefore adopt the convention that compactness is part of the definition of locally normal subgroups. Obvious examples of locally normal subgroups are provided by the trivial subgroup, or by compact open subgroups. When G is a simple Lie group or a simple algebraic group over a local field, every locally normal subgroup is of this form. However, in all other known examples of groups in $\mathscr{S}$, it has been observed, or is suspected, that there exist non-trivial locally normal subgroups that are not open. Our first result describes the algebraic structure of locally normal subgroups.