C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 351 (2013) 215–219

Contents lists available at SciVerse ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Geometry/Topology

The L^2-Alexander invariant detects the unknot

L'invariant d'Alexander L^2 détecte le nœud trivial

Fathi Ben Aribi

Institut de mathématiques de Jussieu–Paris Rive gauche, université Paris-Diderot (Paris-7), UFR de mathématiques, case 7012, bâtiment Sophie-Germain, 75205 Paris cedex 13, France

ARTICLE INFO

Article history:
Received 7 February 2013
Accepted after revision 15 March 2013
Available online 10 April 2013

Presented by the Editorial Board

ABSTRACT

The aim of this note is to prove that the L^2-Alexander invariant, a knot invariant defined using L^2-torsions, detects the unknot.

RÉSUMÉ

Le but de cette note est de démontrer que l'invariant d'Alexander L^2, un invariant de nœuds défini via des torsions L^2, détecte le nœud trivial.

Version française abrégée

À la suite des travaux initiés en 1976 par M.F. Atiyah [2], diverses versions L^2 d'invariants topologiques classiques sont apparues, comme les nombres de Betti L^2 ou la torsion L^2. Suivant ce principe, Li et Zhang [6] ont introduit en 2006 une version L^2 du polynôme d'Alexander usuel, définie à l'aide du calcul de Fox.

Dans cette note, nous montrons que cet invariant caractérise le nœud trivial. Rappelons la définition de l'invariant d'Alexander L^2 $\Delta_K^{(2)}$ d'un nœud $K \subset S^3$: considérons $P = \langle g_1, \ldots, g_k \mid r_1, \ldots, r_{k-1}\rangle$ une présentation de Wirtinger du groupe Γ de K, $F_{P,1} = (\partial r_j / \partial g_i)_{2 \leqslant i \leqslant k,\, 1 \leqslant j \leqslant k-1} \in M_{k-1,k-1}(\mathbb{C}\Gamma)$ la matrice de Fox associée (privée de sa première colonne) et $\phi_P : \Gamma \to \mathbb{Z}$, $g_i \mapsto 1$ le morphisme d'abélianisation. Fixons $t \in \mathbb{R}_+^*$ et considérons le morphisme $\psi_{P,t} : \mathbb{C}\Gamma \to \mathbb{C}\Gamma$ défini par $\sum_{g\in\Gamma} c_g \cdot [g] \mapsto \sum_{g\in\Gamma} c_g \cdot t^{\phi_P(g)} \cdot [g]$. On considère alors $R_{\psi_{P,t}(F_{P,1})} : l^2(\Gamma)^{k-1} \to l^2(\Gamma)^{k-1}$, l'opérateur sur $l^2(\Gamma)^{k-1}$ qui agit coordonnée par coordonnée comme Γ agit sur $l^2(\Gamma)$, par multiplication à droite ; on suppose, de plus, $R_{\psi_{P,t}(F_{P,1})}$ injectif. Alors, $\Delta_K^{(2)}(t) := \det_{\mathcal{N}(\Gamma)}(R_{\psi_{P,t}(F_{P,1})})$ où $\det_{\mathcal{N}(\Gamma)}$ est le déterminant de Fuglede–Kadison d'un opérateur pour le groupe Γ (cf. [7]). De plus, $\Delta_K^{(2)}(t)$ est supposé strictement positif et est défini à une puissance entière de t près (tout comme le polynôme d'Alexander $\Delta_K(t)$ était défini à $\pm t^{\mathbb{Z}}$ près). Ainsi, Li et Zhang [6] montrent que $K \mapsto \Delta_K^{(2)}$ est un invariant des nœuds de S^3 à isotopie près, à valeur dans l'espace des fonctions de $\mathbb{R}_+^*$ quotienté par les puissances, $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}_+^*)/\{t \mapsto t^m \mid m \in \mathbb{Z}\}$.

Après le rappel de quelques propriétés de l'invariant, nous annonçons le résultat principal de cette note :

Théorème 0.1. *K est le nœud trivial O si, et seulement si, $\Delta_K^{(2)} = \Delta_O^{(2)}$, avec $\Delta_O^{(2)} = (t \mapsto 1)$.*

E-mail address: benaribi@math.jussieu.fr.

1631-073X/$ – see front matter
http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2013.03.009

Pour démontrer ce résultat, nous utilisons les mêmes idées que [7, Théorème 4.7], en distinguant le cas où l'extérieur M_K de K possède des composantes hyperboliques dans sa décomposition JSJ (cf. [1]) et le cas où il n'en possède pas. Dans le premier cas, $\Delta_K^{(2)}(1) \neq \Delta_O^{(2)}(1)$ par [7, Théorème 4.6]. Dans le second cas, [9, Lemme 5.5] nous assure que K appartient à la classe de nœuds engendrée par O, la somme connexe et les câblages. Or nous établissons dans les Théorèmes 2 et 3 que $K \mapsto \Delta_K^{(2)}$ vérifie des formules simples de somme connexe et de câblages, formules qui permettent de conclure que $\Delta_K^{(2)} = \Delta_O^{(2)}$ seulement si $K = O$.

1. Introduction

Following Atiyah [2], a new class of invariants has appeared in the last thirty years: the L^2-invariants. They give new versions of classical invariants like the Betti numbers by using tools of operator algebra. Lück's monograph [7] gives a quasi-exhaustive overview of these new invariants. In particular, the notion of L^2-torsion has been introduced about twenty years ago by Carey–Mathai, Lott, Lück–Rothenberg, Novikov–Shubin. While the classical Reidemeister torsion was defined using operators with finite spectrum and the usual determinant, the L^2-torsion involves operators with continuous spectrum, and a new determinant introduced by Fuglede and Kadison.

One fundamental result (cf. [7, Theorem 4.6]) is that the L^2-torsion of a hyperbolic three-dimensional manifold is proportional to the hyperbolic volume of the manifold (in fact equal up to a factor $-\frac{1}{6\pi}$).

In 1923, Alexander introduced the first polynomial invariant for knots. Since then, many ways of defining it have been discovered. In 1962, Milnor [8] gave an interpretation of the Alexander polynomial in terms of (Abelian) Reidemeister torsions.

In 2006, Li and Zhang [6] introduced an L^2-Alexander invariant for knots, mirroring the definition of the Alexander polynomial via Fox matrices, but using infinite dimensional operators and the Fuglede–Kadison determinant instead of the usual one. They also observed that the L^2-Alexander invariant of a knot evaluated at $t = 1$ is precisely the L^2-torsion of the knot complement.

The aim of this note is to prove two extension formulas for the L^2-Alexander invariant (Theorems 2 and 3) and deduce that this invariant detects the unknot (Main Theorem).

2. Some background on L^2-invariants

In this article, all algebras and vector spaces will be over $\mathbb{C}$. Let G be a finitely presented group.

We define $l^2(G)$ as the Hilbert space completion with respect to the inner product:

$$\left\langle \sum_{g\in G} c_g \cdot [g], \sum_{g\in G} d_g \cdot [g] \right\rangle = \sum_{g\in G} c_g \cdot \overline{d_g},$$

on the complex group ring $\mathbb{C}G$.

We define $\mathcal{N}(G)$, the *von Neumann algebra of G*, as the algebra of all bounded linear endomorphisms of $l^2(G)$ that commute with the endomorphisms L_g (where L_g is the left multiplication by $g \in G$).

The *trace* of an element $\phi \in \mathcal{N}(G)$ is defined by $\mathrm{tr}_{\mathcal{N}(G)}(\phi) = \langle \phi([e]), [e] \rangle$, where $[e] \in \mathbb{C}G \subset l^2(G)$ denotes the unit element. We can extend this trace to $n \times n$-matrices over $\mathcal{N}(G)$ by considering the sum of the traces of the diagonal entries.

Let V be a Hilbert space. V is an $\mathcal{N}(G)$-*module* if V is equipped with a linear left G-action by isometries such that there exists a $\mathbb{C}G$-linear embedding (i.e. a linear injective G-equivariant isometry) of V into an orthogonal direct sum of a finite number of copies of $l^2(G)$.

The *von Neumann dimension* of an $\mathcal{N}(G)$-module V is defined by $\dim_{\mathcal{N}(G)}(V) = \mathrm{tr}_{\mathcal{N}(G)}(\mathrm{pr}_V) \in \mathbb{R}_+^*$, where $\mathrm{pr}_V : \bigoplus_{i=1}^k l^2(G) \to \bigoplus_{i=1}^k l^2(G)$ denotes the orthogonal projection onto V. The von Neumann dimension does not depend on the choice of the embedding of V into a finite number of copies of $l^2(G)$.

A map $f : U \to V$, which is linear, G-equivariant, and bounded for the respective scalar products of U and V, will be called a *map of $\mathcal{N}(G)$-modules*.

Let $f : U \to V$ be a map of $\mathcal{N}(G)$-modules. The *spectral density function of f* is the function $F(f) : [0; \infty[\ni \lambda \mapsto F(f)(\lambda)$ defined as follows:

$$F(f)(\lambda) = \sup\left\{\dim_{\mathcal{N}(G)}(L) \;\middle|\; L \in \mathcal{L}(f, \lambda)\right\}$$

where $\mathcal{L}(f, \lambda) = \{L \text{ sub-}\mathcal{N}(G)\text{-module of } U \mid \forall x \in L,\ \|f(x)\| \leqslant \lambda\|x\|\}$.

Observe that $F(f)(\lambda)$ is monotonous and right-continuous, and so defines a measure $\mathrm{d}F(f)$ on the Borel set of $[0, \infty[$ solely determined by $\mathrm{d}F(f)(]a, b]) = F(f)(b) - F(f)(a)$ for all $a < b$.

The *Fuglede–Kadison determinant* of a map of $\mathcal{N}(G)$-modules $f : U \to V$ is defined as

$$\det_{\mathcal{N}(G)}(f) = \exp\left(\int_{0^+}^{\infty} \ln(\lambda)\, \mathrm{d}F(f)(\lambda) \right)$$

if $\int_{0^+}^{\infty} \ln(\lambda)\, \mathrm{d}F(f)(\lambda) > -\infty$ (we then say that f is *of determinant class*) and as 0 otherwise.