C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 351 (2013) 91–95

Contents lists available at SciVerse ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Ordinary Differential Equations/Automation (theoretical)

Eigenvalues and eigenvectors assignment for neutral type systems

Placement de valeurs propres et de vecteurs propres pour un système avec retard de type neutre

Katerina Sklyar [a], Rabah Rabah [b], Grigory Sklyar [a]

[a] *Institute of Mathematics, University of Szczecin, Wielkopolska 15, 70-451 Szczecin, Poland*
[b] *IRCCyN/École des mines de Nantes, 4, rue Alfred-Kastler, BP 20722, 44307 Nantes cedex 3, France*

ARTICLE INFO

Article history:
Received 24 October 2012
Accepted after revision 13 February 2013
Available online 23 February 2013

Presented by the Editorial Board

ABSTRACT

For a class of linear neutral type systems, the problem of eigenvalues and eigenvectors assignment is investigated, i.e. the system that has the given spectrum and almost all, in some sense, eigenvectors is investigated. The result is used for the analysis of the critical number of solvability of a vector moment problem.

RÉSUMÉ

Pour une classe de systèmes linéaire avec retards de type neutre, on étudie le problème de placement de valeurs et de vecteurs propres à un nombre de vecteurs près. Le résultat est utilisé pour analyser l'intervalle critique de solvabilité d'un problème de moments vectoriel.

Version française abrégée

L'un des problème centraux de la théorie du contrôle est le placement de spectre : placement de valeurs propres, mais aussi de vecteurs propres ou de structure spectrale. Nous considérons ce type de problème pour des systèmes linéaires avec retards de type neutre (1). Le problème de placement de vecteurs et valeurs propres se ramène de fait au problème de placement de valeurs et vecteurs singuliers pour une matrice $\Delta(\lambda)$ (2) dont les éléments sont des fonctions entières. Ces éléments spectraux sont quadratiquement proches des éléments spectraux de l'équation pour le cas $L = 0$. Ces derniers étant entièrement exprimées par la structure spectrale de la matrice A_{-1}.

Dans le présent article, nous étudions le problème inverse suivant :

Quelles conditions doivent satisfaire un ensemble de nombre complexes $\{\lambda\}$ *pour être les racines de l'équation caractéristique* $\det \Delta(\lambda) = 0$ *et une famille de vecteurs pour constituer le noyau de la matrice* $\Delta(\lambda)$ *correspondant à l'équation* (1) *pour un choix particulier de matrices* $A_{-1}, A_2(\theta), A_3(\theta)$?

En fait, le noyau à droite (ou le noyau à gauche) de la matrice $\Delta(\lambda)$ est lié directement aux vecteurs propres du système (1) représentés sous la forme (3) dans l'espace de Hilbert $M_2 = \mathbb{C}^n \times L_2([-1,0], \mathbb{C}^n)$. Après une description détaillé des propriétés spectrales du système (3), on aboutit à une caractérisation des familles de valeurs propres et vecteurs propres réalisables par un choix des matrices $A_{-1}, A_2(\theta), A_3(\theta)$.

E-mail addresses: sklar@univ.szczecin.pl (K. Sklyar), Rabah.Rabah@mines-nantes.fr (R. Rabah), sklar@univ.szczecin.pl (G. Sklyar).

1631-073X/$ – see front matter
http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2013.02.007

Théorème 0.1. *Soit $\mu_1, \dots, \mu_n$ des nombres complexes distincts et $z_1, \dots, z_n$ une famille libre de $\mathbb{C}^n$. Pour $\widetilde{\lambda}_k^m = \ln|\mu_m| + \mathrm{i}(\operatorname{Arg}\mu_m + 2\pi k)$, $m = 1, \dots, n$, $k \in \mathbb{Z}$, on considère un ensemble arbitraire de nombre complexes distincts $\{\lambda_k^m\} \cup \{\lambda_j^0\}_{j=1,\dots,n}$ tel que $\sum_k |\lambda_k^m - \widetilde{\lambda}_k^m|^2 < \infty$, $m = 1, \dots, n$ et un ensemble arbitraire de vecteurs $\{w_k^m\} \cup \{w_j^0\}$ satisfaisant $\sum_k \|w_k^m - z_m\|^2 < \infty$, $m = 1, \dots, n$. Alors il existe des matrices A_{-1}, $A_2(\theta)$, $A_3(\theta)$ telles que :*

i) *les nombres $\{\lambda_k^m, \lambda_j^0\}$ sont les racines simples de l'équation* $\det \Delta(\lambda) = 0$;

ii) $w_k^{m^*} \Delta(\lambda_k^m) = 0$, $m = 1, \dots, n$; $k \in \mathbb{Z}$ *et* $w_j^{0^*} \Delta(\lambda_j^0) = 0$, $j = 1, \dots, n$; *sauf peut être un nombre fini de vecteurs w_k^m à la place desquels on obtient des vecteurs $\widehat{w}_k^m$ arbitrairement proches.*

Ce résultat permet également la résolution d'un problème de moments vectoriel exprimé par les relations (11) et, plus précisément, de quantifier l'intervalle $(0, T_0)$ pour lequel le problème est solvable. Cet intervalle est lié à l'indice de contrôlabilité d'une paire (A_{-1}, B) induite par le problème (cf. [3]).

1. Introduction

One of central problems in control theory is the spectral assignment problem. It is important to emphasize that the problem means the assignment of not only eigenvalues, but also eigenvectors or (in general) some geometric eigenstructure.

Our purpose is to investigate this kind of problems for a large class of neutral type systems given by the equation:

$$\dot{z}(t) - A_{-1}\dot{z}(t-1) = Lz(t+\cdot), \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

where $Lf(\cdot) = \int_{-1}^{0} [A_2(\theta)\dot{f}(\theta) + A_3(\theta)f(\theta)]\,\mathrm{d}\theta$, $f(\theta) \in \mathbb{R}^n$ and A_{-1}, $A_2(\cdot)$, $A_3(\cdot)$ are $n \times n$ matrices. The elements of A_2 and A_3 are in $L^2(-1, 0)$.

It is well known [2] that the spectral properties of this system are described by the characteristic matrix $\Delta(\lambda)$ given by:

$$\Delta(\lambda) = \lambda I - \lambda \mathrm{e}^{-\lambda} A_{-1} - \int_{-1}^{0} \left[\lambda \mathrm{e}^{\lambda\theta} A_2(\theta) - \mathrm{e}^{\lambda\theta} A_3(\theta)\right] \mathrm{d}\theta. \tag{2}$$

In fact, the problem of assignment of eigenvalues and eigenvectors is reduced to a problem of assignment of singular values and degenerating vectors of the entire matrix value function $\Delta(\lambda)$. It is remarkable [5,6] that the roots of $\det\Delta(\lambda) = 0$ are quadratically close to a fixed set of complex numbers which are the logarithms of eigenvalues of the matrix A_{-1}. Moreover, the degenerating vectors of $\Delta(\lambda_k)$ are also quadratically close to the eigenvectors of A_{-1}.

In this paper we investigate an inverse problem:

What conditions must satisfy a sequence of complex numbers $\{\lambda\}$ and a sequence of vectors in order to be a sequence of roots for the characteristic equation $\det\Delta(\lambda) = 0$ *and a sequence of degenerating vectors for the characteristic matrix $\Delta(\lambda)$ of Eq.* (1) *respectively for some choice of matrices A_{-1}, $A_2(\theta)$, $A_3(\theta)$?*

The result obtained for this problem allows us to clarify the critical interval for the solvability of a vector moment problem. Namely, this critical interval is given by the controllability index of a couple (A_{-1}, B) related to the moment problem (as considered in [3]).

2. The operator representation and the spectral equation

As it is shown in [5,6], the system in question can be rewritten in the operator form:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(y, z_t(\cdot)\big) = \mathcal{A}\big(y, z_t(\cdot)\big), \tag{3}$$

where $z_t(\cdot) = z(t+\cdot)$ and $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \to M_2 = \mathbb{C}^n \times L_2([-1, 0], \mathbb{C}^n)$,

$$D(\mathcal{A}) = \big\{\big(y, \varphi(\cdot)\big) \,\big|\, \varphi(\cdot) \in H^1\big([-1, 0], \mathbb{C}^n\big),\ y = \varphi(0) - A_{-1}\varphi(-1)\big\},$$

and the operator $\mathcal{A}$ is given by formula $\mathcal{A}(y, \varphi(\cdot)) = (L\varphi(\cdot), \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\theta}(\cdot))$. This operator is denoted by $\widetilde{\mathcal{A}}$ instead of $\mathcal{A}$ if $A_2(\theta) = A_3(\theta) \equiv 0$. The operator $\widetilde{\mathcal{A}}$ is defined on the same domain $D(\mathcal{A})$. One can consider the operator $\mathcal{A}$ as a perturbation of the operator $\widetilde{\mathcal{A}}$, namely $\mathcal{A}(y, \varphi(\cdot)) = \widetilde{\mathcal{A}}(y, \varphi(\cdot)) + (L\varphi(\cdot), 0)$. Let $\mathcal{B}_0 : \mathbb{C}^n \to M_2$ be given by $\mathcal{B}_0 y = (y, 0)$, and $\mathcal{P}_0 : D(\mathcal{A}) \to \mathbb{C}^n$ by $\mathcal{P}_0(y, \varphi(\cdot)) = L\varphi(\cdot)$. Then $\mathcal{A} = \widetilde{\mathcal{A}} + \mathcal{B}_0\mathcal{P}_0$. Denote by $X_{\mathcal{A}}$ the set $D(\mathcal{A})$ endowed with the graph norm. The operator $\mathcal{P}_0$ browses the set of all linear bounded operators $\mathcal{L}(X_{\mathcal{A}}, \mathbb{C}^n)$ as $A_2(\cdot), A_3(\cdot)$ run over the set of $n \times n$ matrices with components from $L_2[-1, 0]$. Indeed, an arbitrary linear operator Q from $\mathcal{L}(X_{\mathcal{A}}, \mathbb{C}^n)$ can be presented as $Q(y, \varphi(\cdot)) = Q_1(\varphi(0) - A_{-1}\varphi(-1)) + \int_{-1}^{0} \widehat{A}_2(\theta)\dot{\varphi}(\theta)\,\mathrm{d}\theta + \int_{-1}^{0} \widehat{A}_3(\theta)\varphi(\theta)\,\mathrm{d}\theta$, where $\widehat{A}_2(\cdot), \widehat{A}_3(\cdot)$ are $(n \times n)$-matrices with component from $L_2[-1, 0]$ and Q_1 is an $(n \times n)$ matrix. Let us observe that $\varphi(-1) = \int_{-1}^{0} \theta\dot{\varphi}(\theta)\,\mathrm{d}\theta + \int_{-1}^{0} \varphi(\theta)\,\mathrm{d}\theta$, $\varphi(0) = \int_{-1}^{0} (\theta + 1)\dot{\varphi}(\theta)\,\mathrm{d}\theta +$