C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 350 (2012) 801–806

Contents lists available at SciVerse ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Number Theory

# Special values of fractional hypergeometric functions for function fields

## *Valeurs spéciales des fonctions hypergéométriques fractionnaires pour les corps de fonctions*

Jia-Yan Yao

*Department of Mathematics, Tsinghua University, Beijing 100084, PR China*

ARTICLE INFO

*Article history:*
Received 30 August 2012
Accepted after revision 2 October 2012
Available online 18 October 2012

Presented by the Editorial Board

ABSTRACT

In this work we study the fractional hypergeometric functions for function fields, introduced by D.S. Thakur. We shall characterize algebraic functions among them, and show the transcendence of special values at some nonzero algebraic arguments, in the case when they are entire transcendental functions.



RÉSUMÉ

Dans ce travail nous étudions les fonctions hypergéométriques fractionnaires pour les corps de fonctions, introduites par D.S. Thakur. Nous caractérisons celles de ces fonctions qui sont algébriques, et nous démontrons la transcendance de valeurs spéciales en certains arguments algébriques non nuls de celles qui sont des fonctions transcendantes entières.



### Version française abrégée

Soit $p \geqslant 2$ un nombre premier et $q = p^\theta$ avec $\theta \geqslant 1$ un entier. Nous désignons par $\mathbb{F}_q$ le corps fini à $q$ éléments, par $\mathbb{F}_q[T]$ l'anneau intègre des polynômes en $T$ à coefficients dans $\mathbb{F}_q$, et par $\mathbb{F}_q(T)$ le corps de fractions de $\mathbb{F}_q[T]$. Pour tous les $P, Q \in \mathbb{F}_q[T]$ avec $Q \neq 0$, nous définissons $|P/Q|_\infty := q^{\deg P - \deg Q}$, et appelons $|\cdot|_\infty$ la valeur absolue $\infty$-adique sur $\mathbb{F}_q(T)$. Nous désignons par $\mathbb{F}_q((T^{-1}))$ le complété topologique de $\mathbb{F}_q(T)$ pour $|\cdot|_\infty$, et par $\mathbf{C}_\infty$ le complété topologique d'une clôture algébrique fixée de $\mathbb{F}_q((T^{-1}))$.

Pour tout $j \in \frac{1}{\theta}\mathbb{Z}$ ($j \geqslant 0$), posons

$$D_j = \prod_{k=0}^{\lceil j \rceil - 1} \left(T^{q^{j-k}} - T\right)^{q^k}, \quad \text{et} \quad L_j = \prod_{k=0}^{\lceil j \rceil - 1} \left(T^{q^{j-k}} - T\right),$$

où $\lceil j \rceil$ est la partie entière de $j$, i.e. le plus petit entier $\geqslant j$.

*E-mail address:* jyyao@math.tsinghua.edu.cn.

1631-073X/$ – see front matter 
http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2012.10.002

Fixons $a \in \frac{1}{\theta}\mathbb{Z}$. Pour tous les entiers $n \geqslant 0$, définissons

$$(a)_n = \begin{cases} D_{n+a-1}^{q^{-(a-1)}} & \text{si } a > 0, \\ (-1)^{\lceil -a \rceil - n} L_{-a-n}^{-q^n} & \text{si } n \leqslant -a \text{ et } a \leqslant 0, \\ 0 & \text{si } n > -a \geqslant 0. \end{cases}$$

Suivant D.S. Thakur [8, p. 226], $\forall r, s \in \mathbb{N}$ et $\forall a_i, b_j \in \frac{1}{\theta}\mathbb{Z}$ $(1 \leqslant i \leqslant r,\ 1 \leqslant j \leqslant s)$ avec $b_j > 0$ (de sorte qu'il n'existe pas de dénominateurs nuls), définissons la fonction hypergéométrique fractionnaire ${}_r\mathbf{F}_s$ comme :

$${}_r\mathbf{F}_s(a_1, \ldots, a_r; b_1, \ldots, b_s; z) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(a_1)_n \cdots (a_r)_n}{D_n (b_1)_n \cdots (b_s)_n} z^{q^n},$$

et la désignons par ${}_r\mathbf{F}_s(z)$, quand les paramètres sont bien compris. Si $i \in \mathbb{N}$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$ tel que $a_i \leqslant 0$, alors $(a_i)_n = 0$ pour tout $n > -a_i$. Dans ce cas ${}_r\mathbf{F}_s$ est un polynôme en $z$. Pour éviter cette trivialité, nous supposerons dans la suite $0 < a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_r$, $0 < b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_s$, et $b_0 = 1$.

Par un calcul direct, nous obtenons tout de suite que le rayon de convergence $R$ de ${}_r\mathbf{F}_s$ satisfait à

$$R = \begin{cases} 0 & \text{si } r > s+1, \\ q^{-\sum_{i=1}^{r}(\lceil a_i \rceil - 1) + \sum_{j=1}^{s}(\lceil b_j \rceil - 1)} & \text{si } r = s+1, \\ +\infty & \text{si } r < s+1. \end{cases}$$

Si $R = +\infty$, alors ${}_r\mathbf{F}_s$ est une fonction entière mais pas un polynôme selon notre hypothèse, elle est donc une fonction transcendante (voir par exemple Théorème 5 de [14]).

$\forall i, j \in \mathbb{Z}$ $(0 \leqslant i, j < \theta)$, posons $\delta(i, j) = 1$ si $i = j$, et 0 sinon. $\forall a \in \frac{1}{\theta}\mathbb{Z}$ $(a \geqslant 0)$, notons $\langle a \rangle := \theta \lceil a \rceil - \theta a$. $\forall i \in \mathbb{Z}$ $(0 \leqslant i < \theta)$, posons $a_i(0) = \sum_{t=1}^{r} \delta(i, \langle a_t \rangle)$, $b_i(0) = \sum_{t=0}^{s} \delta(i, \langle b_t \rangle)$, $c_i^-(0) = \max(0, b_i(0) - a_i(0))$.

Voici les résultats principaux :

**Théorème 1.** *Soient $r, s \geqslant 0$ deux entiers tels que $r = s+1$, et $0 < a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_r$, $0 < b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_s$ des rationnels dans $\frac{1}{\theta}\mathbb{Z}$. Alors ${}_r\mathbf{F}_s(z)$ est une fonction algébrique sur $\mathbb{F}_p(T, z)$ si et seulement si $({}_r\mathbf{F}_s(z))^{q^g} \in \mathbb{F}_p[T][[z]]$, avec $g = \max(\lceil a_r \rceil, \lceil b_s \rceil)$.*

**Théorème 2.** *Soient $r, s \geqslant 0$ deux entiers tels que $r < s+1$, et $0 < a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_r$, $0 < b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_s$ des rationnels dans $\frac{1}{\theta}\mathbb{Z}$ tels que $q(s+1-r) > c := \sum_{i=0}^{\theta-1} c_i^-(0)$ (en particulier si $(1 - \frac{1}{q})(s+1) > r$). Alors ${}_r\mathbf{F}_s(\gamma)$ est transcendant, pour tout $\gamma \in \mathbf{C}_\infty \setminus \{0\}$ algébrique tel que $[\mathbb{F}_q(T, \gamma), \mathbb{F}_q(T)]_{\mathrm{sep}} < q(s+1-r)/c$ ou que $\mathbb{F}_q(T, \gamma)$ possède une seule place sur la place à l'infini de $\mathbb{F}_q(T)$.*

## 1. Statements of main results

Classical hypergeometric functions are very important and have been studied by many authors. For example, F. Beukers and G. Heckman determined in [2] (following H.A. Schwarz in the simplest case) all the algebraic hypergeometric functions with rational parameters. For transcendental hypergeometric functions, there are many important results about the description, finiteness or infinitude of the set of algebraic arguments at which special values are also algebraic, for example, results by C.L. Siegel, A.B. Shidlovsky, J. Wolfart, P.B. Cohen, G. Wüstholz, W.D. Brownawell, F. Beukers. For more details and references, see for example the excellent surveys given by F. Beukers and P. Tretkoff at Arizona Winter School 2008, available as lecture notes at the website http://swc.math.arizona.edu/aws/2008/index.html.

D.S. Thakur introduced in 1995 two types of analogs ${}_rF_s$ and ${}_r\mathcal{F}_s$ of hypergeometric functions for function fields. See [8, 9], and [10, §6.5], [5] (see also [6,7]) for motivation and various properties such as analogues of Gauss differential equations they satisfy, good specializations, contiguous relations, transformations, connections with tensor powers of the Carlitz module, etc.

In this work we only discuss the first analog ${}_rF_s$, or rather its generalization from integral to fractional parameters (for the integral case, see [11] and [12]), which were suggested by D.S. Thakur in [8, p. 226] (but the detailed treatment was not published) for some fractional parameters when $q$ is not a prime so that there are more roots of unity available than in the prime fields. Classically, special values of hypergeometric functions with fractional parameters are quite important. For example, they occur naturally in the study of periods and $p$-adic periods of elliptic curves (see [3,4], and also [1, §I.3]). It is conceivable, but not yet proved, that such a connection exists between the new function under consideration at half-integral parameters (when $q$ is a square) and periods of rank two Drinfeld modules, parallel to the classical case, and functions with parameters having higher denominators connecting to higher rank, with no parallel to the classical case. Further, these fractional hypergeometric functions have interesting specializations studied by L. Carlitz.

Now we introduce some notation and definitions.

Fix $p \geqslant 2$ a prime number and $q = p^\theta$ with $\theta \geqslant 1$ an integer. Let $\mathbb{F}_q$ be the finite field with $q$ elements, $\mathbb{A} = \mathbb{F}_q[T]$ be the ring of polynomials in $T$ over $\mathbb{F}_q$, and $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q(T)$ be the fraction field of $\mathbb{A}$. For all $P, Q \in \mathbb{F}_q[T]$ and $Q \neq 0$, set