Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009) 21–25
COMPTES RENDUS
MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Lie Algebras

Generalized flag geometries and manifolds associated to short $\mathbb{Z}$-graded Lie algebras in arbitrary dimension

Julien Chenal

Institut Elie-Cartan Nancy (IECN), Nancy-Université, CNRS, INRIA, boulevard des Aiguillettes, B.P. 239, 54506 Vandoeuvre-lès-Nancy, France

Received 15 April 2008; accepted after revision 26 November 2008

Available online 23 December 2008

Presented by Michèle Vergne

Abstract

The object of this Note is to define the generalized flag geometry of a graded Lie algebra which corresponds to the generalized projective geometry in the case of 3-gradings. Then we construct a structure of manifold on this generalized flag geometry. This result generalizes a result known for 3-graded Lie algebras to the more general case of $(2k+1)$-graded Lie algebras. ***To cite this article: J. Chenal, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***

Résumé

Géométries de drapeaux généralisées et variétés associées aux algèbres de Lie graduées en dimension quelconque. L'objet de cette Note est de définir la géométrie de drapeaux généralisée d'une algèbre de Lie graduée, qui correspond à la géométrie projective généralisée dans le cas des 3-graduations, puis de construire une structure de variété différentielle sur cette géométrie. Ce résultat généralise au cas des $(2k+1)$-graduations un résultat déjà connu pour les 3-graduations. ***Pour citer cet article : J. Chenal, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***

Version française abrégée

Dans une première partie, nous considérons le groupe projectif élémentaire $G := PE(\mathfrak{g}) \subset \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ d'une algèbre de Lie graduée $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_k \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}_{-k}$. C'est le groupe engendré par les deux groupes $U^+ := \{\mathrm{e}^{\mathrm{ad}(x)},\ x \in \bigoplus_{i=1}^k \mathfrak{g}_i\}$ et $U^- := \{\mathrm{e}^{\mathrm{ad}(x)},\ x \in \bigoplus_{i=1}^k \mathfrak{g}_{-i}\}$ (cf. [6,2]) ; puis on considère trois espaces homogènes : $X^+ := PE(\mathfrak{g})/P^-$, $X^- := PE(\mathfrak{g})/P^+$, où pour $\sigma \in \{+,-\}$, $P^\sigma := U^\sigma H$ avec H le sous-groupe des éléments du groupe projectif élémentaire qui préservent la graduation, et $M := PE(\mathfrak{g})/H$. Alors M s'injecte dans $X^+ \times X^-$ et plus précisément, M est isomorphe à l'orbite du point de base (P^-, P^+) dans $X^+ \times X^-$ sous l'action du groupe projectif élémentaire. Enfin, sur $X^+ \times X^-$, on définit une relation de transversalité : le couple (x, y) où $x \in X^+$ et $y \in X^-$, est dit *transverse* si $(x, y) \in M$. Alors (X^+, X^-), avec la relation de transversalité forme ce que nous appellons la *géométrie de drapeaux généralisée* associée à la graduation de $\mathfrak{g}$.

E-mail address: chenal@iecn.u-nancy.fr.

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2008.12.001

Dans une deuxième partie, nous utilisons les filtrations de $\mathfrak{g}$, i.e., les drapeaux de sous-espaces de $\mathfrak{g}$ de la forme $0 = \mathfrak{n}_{k+1} \subset \mathfrak{n}_k \subset \mathfrak{n}_{k-1} \subset \cdots \subset \mathfrak{n}_0 \subset \mathfrak{n}_{-1} \subset \cdots \subset \mathfrak{n}_{-k+1} \subset \mathfrak{n}_{-k} = \mathfrak{g}$ avec $[\mathfrak{n}_i, \mathfrak{n}_j] \subset \mathfrak{n}_{i+j}$, pour obtenir une réalisation géométrique des espaces X^+ et X^-. On obtient X^+ et X^- comme les orbites sous l'action du groupe projectif élémentaire des filtrations associées à la graduation de $\mathfrak{g}$: $X^+ \cong G.\mathfrak{n}^-$ et $X^- \cong G.\mathfrak{n}^+$ où

$$\mathfrak{n}^+ := (\mathfrak{g}_k \subset \mathfrak{g}_k \oplus \mathfrak{g}_{k-1} \subset \cdots \subset \mathfrak{g}_k \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_0 \subset \cdots \subset \mathfrak{g}_k \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{-k+1}) \quad \text{et}$$
$$\mathfrak{n}^- := (\mathfrak{g}_{-k} \subset \mathfrak{g}_{-k} \oplus \mathfrak{g}_{-k+1} \subset \cdots \subset \mathfrak{g}_{-k} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_0 \subset \cdots \subset \mathfrak{g}_{-k} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{k-1}).$$

Enfin, dans une dernière partie, nous utilisons la notion de calcul différentiel sur un corps topologique non discret (cf. [1]) pour construire une structure de variété différentielle sur X^+. Cette construction généralise celle de [3] pour les algèbres de Lie 3-graduées. Pour cela, on suppose que $\mathfrak{n}_1^+$ et $\mathfrak{n}_1^-$ sont des algèbres de Lie topologiques et nous définissons les *opérateurs de Bergman généralisés*, qui généralisent la notion d'opérateur de Bergman dans une paire de Jordan (cf. [5]) : pour $x \in \mathfrak{n}_1^+$, $w \in \mathfrak{n}_1^-$, et $1 \leqslant j \leqslant k$, on pose :

$$B^+(x, w)_j = \mathrm{pr}_{\mathfrak{n}_j^+} \circ \big(\mathrm{e}^{-\mathrm{ad}(x)}\mathrm{e}^{-\mathrm{ad}(w)}\big) \circ \iota_{\mathfrak{n}_j^+} \quad \text{et} \quad B^-(w, x)_j = \mathrm{pr}_{\mathfrak{n}_j^-} \circ \big(\mathrm{e}^{\mathrm{ad}(w)}\mathrm{e}^{\mathrm{ad}(x)}\big) \circ \iota_{\mathfrak{n}_j^-}$$

où $\mathrm{pr}_{\mathfrak{n}_j^\sigma}$ est la projection de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{n}_j^\sigma$ et $\iota_{\mathfrak{n}_j^\sigma}$ l'inclusion de $\mathfrak{n}_j^\sigma$ dans $\mathfrak{g}$, pour $\sigma \in \{+, -\}$.

Alors, nous montrons que sous des hypothèses (H1) et (H2) formulées ci-dessous, il existe sur X^+ une structure de variété différentielle (Theorem 3.2).

1. Definition of generalized flag geometries

In the sequel, $\sigma \in \{+, -\}$ and we assume that $\mathbb{K}$ is a commutative ring in which the integers are invertible.

A $\mathbb{Z}$*-graded Lie algebra* (over $\mathbb{K}$) is a Lie algebra over $\mathbb{K}$ of the form $\mathfrak{g} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_n$, with $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_{i+j}$.

A $(2k+1)$*-graded Lie algebra* is a $\mathbb{Z}$-graded Lie algebra $\mathfrak{g} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_n$ such that $\mathfrak{g}_j = 0$ if $|j| > k$.

Let $\mathfrak{g}$ be a $(2k+1)$-graded Lie algebra. The map $D : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ defined by $DX = \mathrm{i}X$ if $X \in \mathfrak{g}_i$ is a derivation of $\mathfrak{g}$ called the *characteristic derivation* of the grading. If $D = \mathrm{ad}(E)$, $E \in \mathfrak{g}$, D is said an *inner derivation* and E is called an *Euler operator*. Finite dimensional real simple graded Lie algebras have been classified in [4].

For $x \in V^+ := \bigoplus_{i=1}^k \mathfrak{g}_i$, or $x \in V^- := \bigoplus_{i=1}^k \mathfrak{g}_{-i}$, we define the operator

$$\mathrm{e}^{\mathrm{ad}(x)} := \sum_{j=0}^{2k} \frac{1}{j!}\mathrm{ad}(x)^j.$$

By our assumption on $\mathbb{K}$, $\mathrm{e}^{\mathrm{ad}(x)}$ is well-defined and is an automorphism of $\mathfrak{g}$. We define the groups generated by these operators,

$$U^+ := U^+(D) := \big\{\mathrm{e}^{\mathrm{ad}(x)},\ x \in V^+\big\}, \qquad U^- := U^-(D) := \big\{\mathrm{e}^{\mathrm{ad}(x)},\ x \in V^-\big\}$$

and the group generated by U^+ and U^-:

Definition 1.1. The group $G := PE(\mathfrak{g}, D) := \langle U^+, U^-\rangle \subset \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ is called the *projective elementary group of* $(\mathfrak{g}, D)$ (cf. [6] and [2]).

We define also the *automorphism group of* $(\mathfrak{g}, D)$ by

$$\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}, D) := \big\{g \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}),\ g \circ D = D \circ g\big\}$$

and the subgroups

$$H := G(D) \cap \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}, D) \quad \text{and} \quad P^\sigma := HU^\sigma = U^\sigma H.$$

The elements of H commute with the derivation D, so they preserve the grading, and normalize U^σ so P^+ and P^- are subgroups of G. Finally, we define homogeneous spaces:

$$X^+ := G/P^-, \quad X^- := G/P^+ \quad \text{and} \quad M := G/H.$$

We note (o^+, o^-) the base point (P^-, P^+) of $X^+ \times X^-$.