Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 345 (2007) 67–72
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Partial Differential Equations/Mathematical Problems in Mechanics

Lyapunov analysis and stabilization to the rest state for solutions to the 1D-barotropic compressible Navier–Stokes equations

Patrick Penel [a], Ivan Straškraba [b]

[a] *Université du Sud, Toulon-Var, département de mathématique, BP 20132, 83957 La Garde, France*
[b] *Mathematical Institute of the Academy of Sciences of the Czech Republic, Žitnà. 25, 115 67 Praha 1, Czech Republic*

Received 2 October 2006; accepted after revision 24 April 2007

Available online 6 July 2007

Presented by Gérard Iooss

Abstract

In this Note, we establish new estimates for the long time behavior of the solutions to the Navier–Stokes Equations for a compressible barotropic fluid in 1D, with homogeneous Dirichlet boundary conditions, with large initial data, and under the influence of a large mass force in the case when the stationary density admits vacua: a highly singular problem. As a consequence we bring new answers to the question of the stabilizing rate of convergence. ***To cite this article: P. Penel, I. Straškraba, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 345 (2007).***

Résumé

Analyse de Lyapunov et stabilisation vers l'état d'équilibre pour les solutions des equations de Navier–Stokes compressibles unidimensionnelles. Dans cette Note, nous établissons de nouvelles estimées pour le comportement asymptotique en temps des solutions des équations unidimensionnelles de Navier–Stokes pour un fluide compressible barotropique, associées à des conditions aux limites homogènes de Dirichlet, pour de larges conditions initiales, sous l'influence de larges forces externes telles que la densité stationnaire peut s'annuler : un problème fortement singulier. Comme conséquence nous apportons une réponse nouvelle à la question du taux de convergence. ***Pour citer cet article : P. Penel, I. Straškraba, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 345 (2007).***

Version française abrégée

La procédure de construction d'une fonctionnelle de Lyapunov est connue dans le cas de densité stationnaire globalement minorée [8]. En modifiant soigneusement la procédure, on démontre qu'elle est opportune même si l'on perd toute borne inférieure uniforme pour la densité (ce qui est le cas ici puisque l'on s'intéresse à la situation où l'unique équilibre présente un ensemble de mesure nulle où la densité peut s'annuler : un exemple sera donné dans le texte anglais).

E-mail addresses: penel@univ-tln.fr (P. Penel), strask@math.cas.cz (I. Straškraba).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2007.04.018

Les résultats obtenus conduisent à une estimation du taux de convergence vers l'équilibre. Ils prennent en compte une classe assez large de fonctions d'état descriptives de la pression, incluant les cas $p(\rho)=\rho^\gamma$ avec $\gamma>1$ quelconque. Ils sont énoncés de façon précise au théorème 7, avec l'inégalité d'énergie généralisée

$$\begin{aligned}&\|\sqrt{\rho}\,u\|_2^2+\|\rho-\rho_\infty\|_\beta^\beta+\big\|p(\rho)-p(\bar\rho)\big\|_2^2\\&\quad\leqslant c\left\{\mathrm{e}^{-\alpha(t-t_0)}\left(1+\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{\alpha s}\big\|g(s,\cdot)\big\|_2^2\,\mathrm{d}s\right)+\int_t^\infty\big\|g(s,\cdot)\big\|_2^2\,\mathrm{d}s\right\}\quad\text{pour tous } t>t_0\geqslant 0.\end{aligned}$$

Les notations, les hypothèses et les idées-clés de démonstration seront donnés dans le texte anglais, pour les détails nous renvoyons à l'article [6]. L'introduction d'une densité quasi-stationnaire, notée $\bar\rho$, (voir (11), (12)) (voir aussi [4,8]), avec une contrainte pour la valeur moyenne de $p(\bar\rho)$, nous semble essentielle.

1. Introduction

We deal with the following Navier–Stokes initial-boundary value problem in the domain $Q_T=(0,T)\times(0,l)$, $0<T\leqslant\infty$

$$\rho_t+(\rho u)_x=0\quad\text{in } Q_\infty, \tag{1}$$

$$(\rho u)_t+\big(\rho u^2\big)_x-\big(\mu u_x-p(\rho)\big)_x=\rho f\quad\text{in } Q_\infty, \tag{2}$$

$$u\,|_{x=0,l}=0\quad\text{in } (0,\infty), \tag{3}$$

$$\rho\,|_{t=0}=\rho^0\quad\text{and}\quad u\,|_{t=0}=u^0\quad\text{in } (0,l), \tag{4}$$

u denotes the velocity, ρ the density, $\mu>0$ the viscosity coefficient.

Let the initial functions ρ^0 and u^0 be given in $H^1(0,l))$ and satisfy $\rho^0>0$ and $u^0|_{x=0,l}=0$; $m=\int_0^l\rho^0(x)\,\mathrm{d}x>0$ is assumed to be also given.

Our main requirements on the state function $p(\cdot)$ are as follows:

$$\begin{cases}p(\cdot)\text{ continuous, increasing on } [0,\infty),\ p(0)=0,\ p(\infty)=\infty,\\ p'(\cdot)\in L^\infty_{\mathrm{loc}}(0,\infty),\ p'(r)>0\text{ when } r>0,\ p(r)\sim r^\gamma\text{ as } r\to 0^+\text{with a certain } \gamma>0,\\ rp'(r)\leqslant cste\text{ as } r\to 0^+.\end{cases}$$

It is standard that the system (1)–(4) has a strong solution (u,ρ) for any T

$$u\in H^1(Q_T)\cap L^2\big(0,T;H_0^1(0,l)\cap H^2(0,l)\big), \tag{5}$$

$$\rho\in C^0(Q_T),\quad \rho_t,\rho_x\in L^{\infty,2}(Q_T),\quad \rho>0 \tag{6}$$

with the mass conservation

$$\int_0^l\rho(t,x)\,\mathrm{d}x=\int_0^l\rho^0(x)\,\mathrm{d}x=m,$$

and the energy equality

$$d_tE(t)+\mu\int_0^l(u_x)^2\,\mathrm{d}x=\int_0^l\rho g u\,\mathrm{d}x \tag{7}$$

denoting $E(t)=\int_0^l(1/2\rho u^2+P(\rho)-\rho F)\,\mathrm{d}x$ where $F(x)=If_\infty(x)=\int_0^x f_\infty(y)\,\mathrm{d}y$, $P(r)=r\int_1^r\frac{p(s)-p(1)}{s^2}\,\mathrm{d}s$, and assuming a natural structure for f, $f=f_\infty+g$ with $f_\infty\in W^{1,\infty}(0,l)$, and $g\in L^{2,\infty}(Q_\infty)$ expected to tend to zero.

As a consequence of (7), the following three properties are well-known and easily established either in the Lagrangian mass coordinates or in the Eulerian ones:

(i) estimates for $\|\sqrt{\rho}u\|_{L^{\infty,2}}$, $\|P(\rho)\|_{L^{\infty,1}}$ and $\|u_x\|_{L^2(Q_\infty)}$,