Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008) 1267–1270
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Équations aux dérivées partielles

# Modèle de milieu poreux déformable : Existence de solution faible

Soulèye Kane

*Institut de Mathématiques, Université de Neuchâtel, 11, rue Emile-Argand, CH-2000 Neuchâtel, Suisse*

Reçu le 7 juin 2007 ; accepté après révision le 13 octobre 2008

Disponible sur Internet le 6 novembre 2008

Présenté par Jean-Michel Bony

**Résumé**

On démontre l'existence de solution faible pour un modèle de milieu poreux déformable. Ce modèle est décrit par l'équation $\frac{\partial w}{\partial t} - \Delta\Gamma(w) + \frac{\partial}{\partial z}\lambda(w) = 0$ sur un domaine $\Omega$ borné régulier, avec une condition initiale et de Dirichlet homogène. Les fonctions $\Gamma$ et $\lambda$ sont nulles à l'origine de classe $C^1$ et croissantes. La preuve utilise un résultat de compacité de Dubinskii que nous avons généralisé. ***Pour citer cet article : S. Kane, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).***


**Abstract**

**Swelling porous media model: Existence of a weak solution.** The existence of solution for a swelling porous media model is presented. This model is described by the equation $\frac{\partial w}{\partial t} - \Delta\Gamma(w) + \frac{\partial}{\partial z}\lambda(w) = 0$ on a bounded regular domain $\Omega$, with a initial and homogeneous Dirichlet condition. The functions $\Gamma$ and $\lambda$ vanish at the origin and are increasing and $C^1$. ***To cite this article: S. Kane, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).***


## 1. Modèle

Soit $\Omega$ un domaine borné et assez régulier contenant les trois phases, solide, liquide et gazeuse d'une substance. On note $\phi$ une phase de $\Omega$ et $s$ la phase solide ; $\rho^\phi$ la masse volumique apparente de la phase $\phi$. En utilisant l'expression de la dérivée particulaire pour la phase $\phi$ et la phase $s$, on a

$$\frac{D\rho^\phi}{D^s t} - \frac{\rho^\phi}{\rho_d}\frac{D\rho_d}{D^s t} + \operatorname{Grad}\left[\rho^\phi(v^\phi - v^s)\right] : F^{-1} = f_\phi$$

où Grad désigne l'opérateur gradient par rapport à un état de référence qui est fixe, $v^\phi$ la vitesse par rapport à la phase $\phi$, $F$ le tenseur de déformation, $\rho_d$ la densité apparente sèche du sol, voir [7,8]. Donc

$$\rho_d \frac{D(\rho^\phi/\rho_d)}{D^s t} + \operatorname{Grad}\left[\rho^\phi(v^\phi - v^s)\right] : F^{-1} = f_\phi. \tag{1}$$

*Adresse e-mail :* souleye.kane@unine.ch.

1631-073X/$ – see front matter © 2008 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2008.10.007

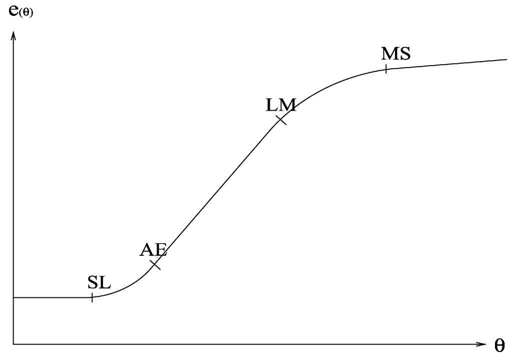


Fig. 1. Courbe de retrait de vertisol et points caractéristiques du modèle de Braudeau (1988).

En posant $v_{\phi/s}$ la vitesse relative de la phase $\phi$ par rapport à la phase solide, l'équation ci-dessus devient

$$\rho_d \frac{D(\rho^\phi/\rho_d)}{D^s t} + \mathrm{Grad}\big[\rho^\phi v_{\phi/s}\big] : F^{-1} = f_\phi. \tag{2}$$

Dans notre modèle physique, on a $\rho^\phi = \rho\theta$, $\phi$ est la phase fluide et $\theta v_{\phi/s} = q_s$ est la vitesse de filtration du fluide par rapport à la phase solide. On a par la loi de Darcy généralisée

$$q = -K(\theta)\,\mathrm{grad}\,H(\theta),$$
$$q_s = F^{-1}q = -F^{-1}K(\theta)\big(\mathrm{Grad}\,H(\theta)\big)\cdot F^{-1}.$$

Notons $e = \rho_s/\rho_d - 1$, $K_s = F^{-1}K$, $\Theta = \theta\rho_s/\rho_d$. Comme $\rho = 1$ pour l'eau, l'équation d'écoulement pour un milieu poreux déformable devient

$$\frac{1}{1+e}\frac{D\Theta}{D^s t} - \mathrm{Grad}\big[K_s(\Theta)\big(\mathrm{Grad}\big(H(\Theta)\big)\big)\cdot F^{-1}\big] : F^{-1} = f_1 \tag{3}$$

avec $H = h - z + h_p$. La quantité $h(s) = -\frac{1}{\alpha}(s^{-1/m} - 1)^{1/n}$ est le potentiel matriciel donné par Van Genuchten [9] ; $\alpha, m, n$ étant des paramètres. La valeur $z$ désigne le potentiel gravitationnel, $h_p$ le potentiel de surcharge donné en coordonnée matérielle, $K_s(\Theta)$ la conductivité hydraulique relative à la phase solide donnée par Van Genuchten, $e = e(\Theta)$ obtenue avec le modèle de retrait de vertisol de E. Braudeau [1] (voir Fig. 1). Considérons une déformation du type $F = g(\Theta)^{-1}I$, $K_s(\Theta) = k(\Theta)I$ avec $g(\Theta) = (\frac{1+e(\Theta)}{1+e_r})^{-1/3}$, $k(s) = k_s s^L(1 - (1 - s^{L/m})^m)^2$ ; $L$ étant un paramètre (voir dans [4]). En supposant qu'il n'y a pas de terme source et en posant

$$w = l(\Theta) = \int_0^\Theta \frac{1}{(1+e(s))g(s)}\,\mathrm{d}s, \qquad \gamma(\Theta) = \int_0^\Theta k(s)g(s)h'(s)\,\mathrm{d}s,$$
$$\Theta = l^{-1}(w), \qquad \Gamma(w) = \gamma\big(l^{-1}(w)\big), \qquad \lambda(w) = k\big(l^{-1}(w)\big)g\big(l^{-1}(w)\big)$$

l'équation (3) donne

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \Delta\Gamma(w) + \frac{\partial}{\partial z}\lambda(w) = 0 \quad \text{dans } \Omega \times ]0, T[, \tag{4}$$
$$w(x,t) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times ]0, T[, \tag{5}$$
$$w(x,0) = w_0(x) \quad \text{dans } \Omega. \tag{6}$$

## 2. Formulation faible

Pour $p > 2$, on suppose qu'il existe $q \in ]0, p-1]$ tel que

$$\Gamma(s) \leqslant s^q, \qquad \lambda(s) \leqslant s^q. \tag{7}$$