Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008) 53–58
Comptes Rendus Mathematique
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Optimal Control

Carleman inequalities and inverse problems for the Schrödinger equation

Alberto Mercado [a], Axel Osses [a], Lionel Rosier [a,b]

[a] *Centro de Modelamiento Matemático (CMM) and Departamento de Ingeniería Matemática (DIM), Universidad de Chile (UMI CNRS 2807), Avenida Blanco Encalada 2120, Casilla 170-3, Correo 3, Santiago, Chile*

[b] *Institut Elie-Cartan, UMR 7502 UHP/CNRS/INRIA, B.P. 239, 54506 Vandœuvre-lès-Nancy cedex, France*

Received 24 July 2007; accepted 22 November 2007

Available online 26 December 2007

Presented by Gilles Lebeau

Abstract

In this Note, we derive new Carleman inequalities for the evolution Schrödinger equation under a weak pseudoconvexity condition, which allows us to use weights with a linear spatial dependence. As a result, less restrictive boundary or internal observation regions may be used to obtain the stability for the inverse problem consisting in retrieving a stationary potential in the Schrödinger equation from a single boundary or internal measurement, respectively. ***To cite this article: A. Mercado et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).***

Résumé

Inégalités de Carleman et problèmes inverses pour l'équation de Schrödinger. Dans cette Note, nous établissons de nouvelles inégalités de Carleman pour l'équation d'évolution de Schrödinger sous une hypothèse de pseudoconvexité faible, qui permet d'utiliser des poids affines en la variable d'espace. Comme application, nous pouvons définir des régions d'observabilité moins restrictives dans le problème inverse consistant à retrouver un potentiel stationnaire dans l'équation de Schrödinger à partir d'une mesure simple effectuée au bord ou à l'intérieur du domaine. ***Pour citer cet article : A. Mercado et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).***

Version française abrégée

Dans cette Note, on considère le problème inverse consistant à retrouver un potentiel stationnaire dans l'équation d'évolution de Schrödinger à partir d'une mesure simple effectuée sur le bord ou à l'intérieur du domaine. Ce problème a été étudié dans [1] pour un domaine borné, et dans [4] pour un domaine non borné, par le biais des inégalités de Carleman et de la méthode de Bukhgeim–Klibanov [2] pour établir la stabilité du potentiel par rapport à la mesure.

E-mail addresses: amercado@dim.uchile.cl (A. Mercado), axosses@dim.uchile.cl (A. Osses), rosier@iecn.u-nancy.fr (L. Rosier).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2007.11.014

La localisation de la région d'observation dépend du choix du poids dans l'inégalité de Carleman. Dans [1] et [6], le poids est supposé satisfaire une condition de pseudoconvexité *stricte*, moins sévère que la condition de pseudoconvexité *forte* considérée dans [5] pour l'obtention d'inégalités de Carleman locales. Dans cette Note, nous établissons des inégalités de Carleman globales, frontière ou internes, sous la condition de pseudoconvexité faible (7), qui peut dégénérer en certains points. Cette condition permet d'utiliser des poids affines en la variable d'espace, et autorise des régions d'observation plus petites que celles généralement considérées dans la littérature.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné de frontière Lipschitzienne, et soient S^+ une partie ouverte de $\partial\Omega$ et $S^- = \partial\Omega \setminus S^+$. On suppose qu'il existe une fonction $\psi \in C^4(\overline{\Omega})$ vérifiant les conditions (6), (7) et (8) ci-dessous, et on définit les fonctions $\theta(x,t) := \exp(\lambda\psi(x))/(t(T-t))$, $\varphi(x,t) := (\exp(\lambda C_\psi) - \exp(\lambda\psi(x))/(t(T-t))$, où $C_\psi = 2\|\psi\|_{L^\infty(\Omega)}$. On peut alors établir l'inégalité de Carleman suivante :

Proposition 0.1. *Supposons qu'il existe une fonction $\psi \in C^4(\overline{\Omega})$ telle que* (6), (7) *et* (8) *aient lieu pour une région $S^+ \subset \partial\Omega$. Alors il existe des constantes $\lambda_0 \geqslant 1$, $s_0 \geqslant 1$ et $C_0 > 0$ telles que pour tout $\lambda \geqslant \lambda_0$, tout $s \geqslant s_0$, et tout $q \in C^{2,1}(\overline{\Omega} \times [0,T])$ vérifiant $q = 0$ sur $\partial\Omega \times [0,T]$, on ait*

$$\int_0^T \int_\Omega \left[\lambda^2 s\theta |\nabla q \cdot \nabla\psi|^2 + \lambda^4 (s\theta)^3 |q|^2 + |\widetilde{M}_1 q|^2 + |\widetilde{M}_2 q|^2\right] e^{-2s\varphi}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t + \int_0^T \int_{S^-} \lambda s\theta \left|\frac{\partial\psi}{\partial n}\right| \left|\frac{\partial q}{\partial n}\right|^2 e^{-2s\varphi}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t$$
$$\leqslant C_0 \left(\int_0^T \int_\Omega |\partial_t q + i\Delta q|^2 e^{-2s\varphi}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t + \int_0^T \int_{S^+} \lambda s\theta \left|\frac{\partial\psi}{\partial n}\right| \left|\frac{\partial q}{\partial n}\right|^2 e^{-2s\varphi}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t \right), \tag{1}$$

où $\widetilde{M}_1$ et $\widetilde{M}_2$ désignent les opérateurs

$$\widetilde{M}_1 q := \left[s(\varphi_t + i\Delta\varphi) - 2is^2|\nabla\varphi|^2\right] q + 2is\nabla\varphi \cdot \nabla q, \tag{2}$$
$$\widetilde{M}_2 q := \left[-s(\varphi_t + i\Delta\varphi) + 2is^2|\nabla\varphi|^2\right] q + q_t - 2is\nabla\varphi \cdot \nabla q + i\Delta q. \tag{3}$$

Considérons à présent le problème inverse consistant à déterminer un potentiel $p = p(x)$ à partir de la mesure sur S^+ de la solution, notée $u(p)$, du système

$$\begin{cases} iu_t + \Delta u + p(x)u = 0 & \text{dans } \Omega \times (0,T), \\ u = h & \text{sur } \partial\Omega \times (0,T), \\ u(0) = u_0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{4}$$

Utilisant la Proposition 0.1, on peut établir la stabilité Lipschitz du potentiel par rapport à la mesure :

Théorème 0.2. *Supposons qu'il existe une fonction $\psi \in C^4(\overline{\Omega})$ telle que* (6), (7) *et* (8) *aient lieu pour une région $S^+ \subset \partial\Omega$. Supposons aussi que $p \in L^\infty(\Omega;\mathbb{R})$, $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ et $r > 0$ soient tels que*

(i) *$u_0(x) \in \mathbb{R}$ ou $iu_0(x) \in \mathbb{R}$ p.p. dans Ω ;*
(ii) *$|u_0(x)| \geqslant r > 0$ p.p. dans Ω ;*
(iii) *$u(p) \in H^1(0,T;L^\infty(\Omega))$.*

Alors, pour tout $m \geqslant 0$, il existe une constante $C = C(m, \|u(p)\|_{H^1(0,T;L^\infty(\Omega))}, r) > 0$ telle que pour tout $q \in B_m(0) \subset L^\infty(\Omega;\mathbb{R})$ vérifiant $\partial u(p)/\partial n - \partial u(q)/\partial n \in H^1(0,T;L^2(S^+))$ on ait

$$\|p - q\|_{L^2(\Omega)} \leqslant C \left\| \frac{\partial u(p)}{\partial n} - \frac{\partial u(q)}{\partial n} \right\|_{H^1(0,T;L^2(S^+))}.$$

Des résultats similaires peuvent être donnés pour une observation interne. Lorsque Ω a la forme d'un stade, on peut réduire la région d'observabilité par rapport à celle considérée dans [1,3] ou [7] grâce à l'utilisation d'un poids de Carleman affine en x (cf. Fig. 1).