Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 344 (2007) 219–224
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Mathematical Analysis

p-adic repellers in $\mathbb{Q}_p$ are subshifts of finite type

Aihua Fan [a,b], Lingmin Liao [a,b], Yue Fei Wang [c], Dan Zhou [b]

[a] *Department of Mathematics, Wuhan University, 430072 Wuhan, China*
[b] *LAMFA, UMR 6140 CNRS, université de Picardie, 33, rue Saint Leu, 80039 Amiens, France*
[c] *Institute of Mathematics, AMSS, CAS, 55 East Road Zhongguancun, 100080 Beijing, China*

Received 21 November 2006; accepted 12 December 2006

Available online 24 January 2007

Presented by Jean-Pierre Kahane

Abstract

We prove that any p-adic transitive weak repeller is isometrically conjugate to a subshift of finite type where a suitable metric is defined. ***To cite this article: A. Fan et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 344 (2007).***

Résumé

Les répulseurs p-adiques dans $\mathbb{Q}_p$ sont des sous-shifts de type fini. Nous prouvons que tout répulseur faible transitif p-adique est isométriquement conjugué à un sous-shift de type fini où une métrique convenable est définie. ***Pour citer cet article : A. Fan et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 344 (2007).***

Version française abrégée

Soit $p \geqslant 2$ un nombre premier et $\mathbb{Q}_p$ le corps des nombres p-adiques. Soit $f : X \to \mathbb{Q}_p$ une application définie sur un compact ouvert X de $\mathbb{Q}_p$ à valeurs dans $\mathbb{Q}_p$. Nous supposons que : (i) $f^{-1}(X) \subset X$; (ii) $X = \bigsqcup_{i \in I} B_{p^{-\tau}}(c_i)$ (une réunion finie de boules disjointes de centres c_i et rayon $p^{-\tau}$, $\tau \in \mathbb{Z}$) et pour tout $i \in I$ il existe un entier $\tau_i \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\left|f(x) - f(y)\right|_p = p^{\tau_i}|x - y|_p \quad (\forall x, y \in B_{p^{-\tau}}(c_i)). \tag{1}$$

Pour une telle application f, définissons son ensemble de Julia par

$$J_f = \bigcap_{n=0}^{\infty} f^{-n}(X). \tag{2}$$

Il est clair que $f^{-1}(J_f) = J_f$ et puis $f(J_f) \subset J_f$. Nous nous proposons d'étudier le système dynamique (J_f, f). Le triplet (X, J_f, f) s'appelle *répulseur faible* (p-adique) si tous les τ_i dans (1) sont positifs, dont au moins un est strictement positif. On l'appelle *répulseur* (p-adique) si tous les τ_i dans (1) sont strictement positifs.

E-mail addresses: ai-hua.fan@u-picardie.fr (A. Fan), lingmin.liao@u-picardie.fr (L. Liao), wangyf@amss.ac.cn (Y.F. Wang), maureen28@sina.com (D. Zhou).

1631-073X/$ – see front matter © 2006 Académie des sciences. Published by Elsevier Masson SAS. All rights reserved.
doi:10.1016/j.crma.2006.12.007

Supposons que tous les τ_i sont positifs. Pour tout $i \in I$, posons

$$I_i := \{j \in I:\ B_j \cap f(B_i) \neq \emptyset\} = \{j \in I:\ B_j \subset f(B_i)\}.$$

Puis definissons la matrice $A = (A_{i,j})_{I \times I}$, dite matrice d'incidence, par

$$A_{ij} = 1 \quad \text{si } j \in I_i; \qquad A_{ij} = 0 \quad \text{sinon.}$$

Si A est irréductible, on dit que (X, J_f, f) est *transitif.*

Soit Σ_A l'espace de sous-shift défini par A et soit σ le décalage à gauche sur Σ_A. Nous équipons Σ_A de la métrique d_f définie comme suit. Pour $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots) \in \Sigma_A$ et $y = (y_0, y_1, \ldots, y_n, \ldots) \in \Sigma_A$, définissons

$$d_f(x, y) = p^{-\tau_{x_0} - \tau_{x_1} - \cdots - \tau_{x_{n-1}} - \kappa(x_n, y_n)}$$

où $n = n(x, y) = \min\{i \geqslant 0:\ x_i \neq y_i\}$ et $p^{-\kappa(x_n, y_n)} = |c_{x_n} - c_{y_n}|_p$. Cette métrique d_f definit la même topologie que la métrique classique definie par $d(x, y) = p^{-n(x,y)}$.

Théorème 0.1. *Soit (X, J_f, f) un répulseur faible transitif p-adique avec A comme matrice d'incidence. La dynamique $(J_f, f, |\cdot|_p)$ est isométriquement conjuguée à la dynamique (Σ_A, σ, d_f).*

Remarque 0.2. Si la matrice d'incidence A n'est pas irréductible, l'ensemble d'indices I est décomposé en classes d'indices $I^{(1)}, I^{(2)}, \ldots, I^{(k)}$. On peut arranger $I^{(1)}, I^{(2)}, \ldots, I^{(k)}$ de sorte que A se présente comme une matrice triangulaire inférieure avec des sous-matrices irréductibles $A_1, A_2, \ldots, A_k$ sur sa diagonale (voir [1]). Alors nous pouvons appliquer le Théorème 0.1 à $f : X^{(t)} \to \mathbb{Q}$ pour tout $1 \leqslant t \leqslant k$, où $X^{(t)} = \bigcup_{i \in I^{(t)}} B_{p^{-\tau}}(c_i)$.

Remarque 0.3. Le Théorème 0.1 est valable non seulement pour les dynamiques p-adiques, mais aussi pour toute dynamique ultramétrique satisfaisant aux conditions (i) et (ii).

Le résultat suivant nous permet d'appliquer le Théorème 0.1 aux dynamiques polynomiales :

Théorème 0.4. *Soit $f \in \mathbb{Q}_p[x]$ un polynôme tel que $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{Q}_p$. Il existe un compact ouvert $X \subset \mathbb{Q}_p$ et un entier τ tels que les conditions* (i) *et* (ii) *soient satisfaites. De plus, pour tout $x \notin J_f$ on a* $\lim_{n\to\infty} |f^n(x)|_p = \infty$.

1. Statement of results

Let $p \geqslant 2$ be a prime number and $\mathbb{Q}_p$ be the field of p-adic numbers. Let $f : X \to \mathbb{Q}_p$ be a map from a compact open set X of $\mathbb{Q}_p$ into $\mathbb{Q}_p$. We assume that (i) $f^{-1}(X) \subset X$; (ii) $X = \bigsqcup_{i \in I} B_{p^{-\tau}}(c_i)$ can be written as a finite disjoint union of balls of centers c_i and of the same radius $p^{-\tau}$ (with some $\tau \in \mathbb{Z}$) such that for each $i \in I$ there is an integer $\tau_i \in \mathbb{Z}$ such that

$$\big|f(x) - f(y)\big|_p = p^{\tau_i} |x - y|_p \quad (\forall x, y \in B_{p^{-\tau}}(c_i)). \tag{3}$$

For such a map f, define its Julia set by

$$J_f = \bigcap_{n=0}^{\infty} f^{-n}(X). \tag{4}$$

It is clear that $f^{-1}(J_f) = J_f$ and then $f(J_f) \subset J_f$. We will study the dynamical system (J_f, f).

The triple (X, J_f, f) is called a *p-adic weak repeller* if all τ_i in (3) are nonnegative, but at least one is positive. We call it a *p-adic repeller* if all τ_i in (3) are positive. For later convenience, we will write $\|f\| = p^{\tau_i}$ for any map having the property (3), which could be called the expanding ratio (resp. contractive ratio) of f on the ball $B_{p^{-\tau}}(c_i)$ when $\tau_i \geqslant 0$ (resp. $\tau_i \leqslant 0$).

In this Note we consider the expanding case, i.e. all τ_i are nonnegative. For any $i \in I$, let

$$I_i := \{j \in I:\ B_j \cap f(B_i) \neq \emptyset\} = \{j \in I:\ B_j \subset f(B_i)\}$$

(the second equality holds because of the expansiveness and of the ultrametric property). Then define a matrix $A = (A_{i,j})_{I \times I}$, called incidence matrix, by